センター試験 (2010 年実施) 数学 I·A 解説

2010 年 1 月 20 日作成
2010 年 1 月 23 日修正

第 1 問

〔1〕 $\alpha = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ を有理化する。

分母・分子に $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ を掛けると、

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}\\ &= \frac{7-2\sqrt{21}+3}{7-3}\\ &= \frac{10-2\sqrt{21}}{4}\\ &= \frac{5-\sqrt{21}}{2} \qquad \cdots(答)\left(\frac{\boxed{\text{ア}}-\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}\right)\end{aligned}$$

2 次方程式 $6x^2-7x+1=0$ の解について、

$$6x^2-7x+1=(6x-1)(x-1)$$

だから、

$$x=\frac{1}{6},\ 1 \qquad \cdots(答)\left(\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\ \boxed{\text{キ}}\right)$$

すると、

⓪ $\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}=\dfrac{15-3\sqrt{21}}{6}=\dfrac{15-\sqrt{189}}{6}>\dfrac{15-\sqrt{196}}{6}=\dfrac{1}{6}$

① $\dfrac{2}{5-\sqrt{21}}>\dfrac{2}{5-\sqrt{16}}=2$

② $\dfrac{1}{6}$

③ 1

したがって、⓪〜③の数のうち最も小さいものは ② $\qquad \cdots(答)\left(\boxed{\text{ク}}\right)$

〔2〕 自然数 n に関する条件は、

$p : n$ は 5 で割ると 1 余る数である。

$q : n$ は 10 で割ると 1 余る数である。

$r : n$ は奇数である。

$s : n$ は 2 より大きい素数である。

となっている。これを少し噛み砕いてみると、

・p について、m を整数として、$n = 5m + 1$ と表せる数であるが、
このとき、一の位の数は 1 または 6 である。

・q について、m を整数として、$n = 10m + 1$ と表せる数であるが、
このとき、位置の位の数は 1 である。

すると、p の集合には q の集合が含まれていることがわかる。

・s について、2 より大きい素数はすべて奇数であることはよく知られた事実である。

したがって、r の集合には s の集合が含まれている。

ここで問題文を見ると、

「p かつ r」=「一の位が 1」 (一の位が 6 だと奇数ではないから)$= q$

つまり、「p かつ r」は q であるための必要十分条件である。 $\cdots$(答)$\left(\boxed{\text{ケ}}\right)$

次に、

$\overline{r} =$「n は偶数」

$\overline{s} =$「$n = 1$, 偶数 , 素数でない奇数」

つまり、$\overline{r}$ ならば $\overline{s}$ だけれど、$\overline{s}$ だからといって $\overline{r}$ ではないから (例えば素数でない奇数は偶数だからあふれてしまう)、

$\overline{r}$ は $\overline{s}$ であるための十分条件である。 $\cdots$(答)$\left(\boxed{\text{コ}}\right)$

最後に、

「p かつ s」= 「n は一の位が 1(である奇数) で素数なもの」

(一の位が 1 または 6 で 2 より大きい素数は奇数だから一の位が 6 なものはすべて除外される)

「q かつ s」= 「n は一の位が 1 で素数なもの」

したがって、

「p かつ s」は「q かつ s」であるための必要十分条件である。 $\cdots$(答)$\left(\boxed{\text{サ}}\right)$

ところで、P, R, S については、上で整理してあるから、それを見ると、

(i) R は S に含まれている

(ii) P は偶数の部分が含まれているから P の奇数部分は R に含まれている

(iii) P の奇数部分は必ずしも素数じゃない (例えば 21 とか) から P の一部は S に含まれている

そうすると、(i) より ④や ⑦は除外され、(ii) と (iii) ⑥もおかしいから ⑤が正解。 $\cdots$(答)$\left(\boxed{\text{シ}}\right)$

第2問

まず、グラフ G_2 の式を変形 (平方完成) する。

$$y = x^2 + 2ax + b = (x+a)^2 - a^2 + b$$

つまり、G_2 の頂点は、$(-a, -a^2+b)$

この点が G_1 の上にあるのだから、グラフ G_1 の式に代入して、

$$-a^2 + b = 3a^2 + 2a - 1 \qquad (x = -a, y = b \text{ を代入するとき符号に注意})$$

$$\therefore b = 4a^2 + 2a - 1 \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{ア}}a^2 + \boxed{\text{イ}}a - \boxed{\text{ウ}}\right)$$

だから、この関係式を代入すれば、G_2 の頂点は

$$(-a, 3a^2 + 2a - 1) \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{エ}}a^2 + 2a - \boxed{\text{オ}}\right)$$

(1) 問題を見ると、頂点の y 座標の最小値を求めているから、G_2 の頂点の y 座標を平方完成してあげると、

$$3a^2 + 2a - 1 = 3\left(a + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}$$

したがって、$a = \dfrac{-1}{3}$ のとき、最小値 $\dfrac{-4}{3}$ $\qquad \cdots(\text{答})\left(\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}, \dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)$

$a = \dfrac{-1}{3}$ のとき、G_2 の頂点は $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{-4}{3}\right)$ となるから、G_2 の軸は $x = \dfrac{1}{3}$ $\qquad \cdots(\text{答})\left(\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\right)$

このとき、G_2 のグラフは、頂点が $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{-4}{3}\right)$ なのだから、

$$y = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}$$

ここで、x 軸との交点を出すのだから、$y = 0$ を代入すれば、

$$0 = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

$$\therefore x = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3} \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1 \pm 2\sqrt{3}}{2} \qquad \cdots(\text{答})\left(\frac{\boxed{\text{セ}} \pm \boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}\right)$$

(2) G_2 が点 $(0, 5)$ を通るので、$x = 0, y = 5$ を代入すると、$5 = b$

したがって、最初の a と b の関係式 $b = 4a^2 + 2a - 1$ に代入すると、

$$5 = 4a^2 + 2a - 1$$

$$4a^2 + 2a - 6 = 0$$

$$2a^2 + a - 3 = 0$$

$$(2a+3)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = 1, \frac{-3}{2} \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{ツ}}, \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\right)$$

ここで、$a = 1$ のとき、G_2 の頂点は $(-1, 4)$ である。

G_2 の頂点を $t \neq 0$ 動かしたとすると、頂点を動かした後の座標は $(t-1, t+4)$ と表せるから、これを G_1 の式に代入すると、

$$t + 4 = 3(t-1)^2 - 2(t-1) - 1$$

$$3t^2 - 9t = 0$$

$$\therefore t = 0,\ 3$$

$t \neq 0$ だから、$t = 3$ つまり x 方向、y 方向に 3 ずつ移動させればよい。$\cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{ニ}}\right)$

第 3 問

△ABC は AB = 3, BC = 4, CA = 5 である直角三角形。

(1) △ABC の内接円の中心を O とし、円 O が 3 辺 BC, CA, AB と接する点は P, Q, R とする。

△ABC は $\angle ABC = 90^\circ$ の直角三角形だから、四角形 ORBP は正方形である。そこでこの 1 辺の長さを t とおこう。

$$AR = 3 - t$$

△ARO と △AQO は合同だから (証明省略)、

$$AQ = 3 - t$$

$$\therefore CQ = 5 - (3 - t) = 2 + t$$

△CQO と △CPO は合同だから (証明省略)、

$$CP = 2 + t$$

BC = BP + CP だから、

$$4 = t + (2 + t)$$

$$\therefore t = 1 \qquad \cdots (答)\left(\boxed{ア}\right)$$

(別解) 三角形の面積について、

$$(3\text{ つの辺の長さの和}) \times (\text{内接円の半径}) \times \frac{1}{2} = (\text{三角形の面積})$$

だから、求める内接円の半径を r とすると、

$$(3 + 4 + 5) \times r \times \frac{1}{2} = 3 \times 4 \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore r = 1 \text{ (別解終わり)}$$

すると、AR = AQ = 2 で、$\cos\angle CAB = \dfrac{3}{5}$ だから、△AQR について、余弦定理より、

$$QR^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \frac{3}{5} = 8 \times \frac{2}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\therefore QR = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \qquad \cdots (答)\left(\frac{\boxed{イ}\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}\right)$$

接弦定理より、$\angle QPR = \angle AQR$ だから、$\sin\angle CAB = \dfrac{4}{5}$ より、

$$\triangle AQR \text{ の面積} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{4}{5} = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \sin\angle AQR$$

$$\therefore \sin\angle AQR = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \sin\angle QPR = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \cdots (答)\left(\frac{\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}\right)$$

(2) AB = 3, BP = 1 だから、ピタゴラスの定理より、

$$AP^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

$$\therefore AP = \sqrt{10} \qquad \cdots (答)\left(\sqrt{\boxed{クケ}}\right)$$

AS = t とおくと、AR = 2, AS = t, AP = $\sqrt{10}$ から、方べきの定理より、

$$t\sqrt{10} = 2^2$$

$$\therefore t = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

したがって、SP = AP − AS = AP − t だったから、

$$\therefore \mathrm{SP} = \frac{3\sqrt{10}}{5} \qquad \cdots(\text{答})\left(\frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{ス}}}\right)$$

すると、$\triangle \mathrm{PSH} \backsim \triangle \mathrm{PAB}$ であるから (証明省略)、

$$\mathrm{PH} : \mathrm{PB} = \mathrm{PS} : \mathrm{PA} = 3 : 5$$

$\mathrm{BP} = 1$ だから、$\mathrm{HP} = \dfrac{3}{5} \qquad \cdots(\text{答})\left(\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\right)$

また、$\mathrm{SH} = 3 \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{5} \qquad \cdots(\text{答})\left(\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\right)$

そして、$\triangle \mathrm{SHC}$ は直角三角形で、$\mathrm{CH} = \dfrac{18}{5}$ だから、

$$\tan \angle \mathrm{BCS} = \frac{\mathrm{SH}}{\mathrm{CH}} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{18}{5}} = \frac{1}{2} \qquad \cdots(\text{答})\left(\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\right)$$

(3) 点 T は RO の延長で RT は円 O の直径である。

そこで、点 T から辺 BC 上の点 U に、$\mathrm{BC} \perp \mathrm{TU}$ となるようにとる。

すると、四角形 OPUT は正方形になって、$\angle \mathrm{TPC} = 45^\circ$ となる。

$\mathrm{TU} = 1, \mathrm{CU} = 2$ となるから、

$$\tan \angle \mathrm{BCT} = \frac{\mathrm{TU}}{\mathrm{CU}} = \frac{1}{2}$$

つまり、$\angle \mathrm{BCT} = \angle \mathrm{BCS}$ となるから、$\triangle \mathrm{SHC} \backsim \triangle \mathrm{TUC}$ である。

故に、点 S、点 T、点 C は一直線上にある

$$\therefore \angle \mathrm{RSC} = \angle \mathrm{RST} = 90^\circ \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{ニヌ}}^\circ\right)$$

また、接弦定理より、

$$\angle \mathrm{PSC} = \angle \mathrm{CPT} = 45^\circ \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{ネノ}}^\circ\right)$$

第 4 問

袋の中に、赤玉が 5 個、白玉が 5 個、黒玉が 1 個の全部で 11 個の玉が入っている。

ここから、5 個玉を取り出したときの取り出し方は、

$${}_{11}\mathrm{C}_5 = \frac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2} = 462 \text{ 通り} \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\textbf{アイウ}}\right)$$

取り決め:

赤球に書かれた数字と白玉に書かれた数字が一致する組の数が得点となる。

2 組 $\to$ 2 点、1 組 $\to$ 1 点、0 組 $\to$ 0 点

0 点となるパターンを考える。

黒球が含まれているとき、それ以外に空きが 4 つあるわけだから、

(i) 赤球 4 つ

(ii) 赤球 3 つ、白玉 1 つで書いてある数は一致しない

(iii) 赤球 2 つ、白玉 2 つで書いてある数は一致しない

(iv) 赤球 1 つ、白玉 3 つで書いてある数は一致しない

(v) 白球 4 つ

の 5 つがある。

(i) の組み合わせは、

$${}_5\mathrm{C}_4 = 5 \text{ 通り}$$

(ii) の組み合わせは、まず赤球 3 つ選んで、それと一致しない数が書いてある白玉は 2 つあるわけだから、その 2 つから 1 個選んであげればよくて、

$${}_5\mathrm{C}_3 \times {}_2\mathrm{C}_1 = 20 \text{ 通り}$$

(iii) の組み合わせは、まず赤球を 2 つ選んであげて、それと一致しない数が書いてある白玉は 3 つあるわけだから、その 3 つから 2 個選んであげればよくて、

$${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_2 = 30 \text{ 通り}$$

(iv) の組み合わせは、まず赤球を 1 つ選んであげて、それと一致しない数が書いてある白玉は 4 つあるわけだから、その 4 つから 3 個選んであげればよくて、

$${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_3 = 20 \text{ 通り}$$

(v) の組み合わせは、

$${}_5\mathrm{C}_4 = 5 \text{ 通り}$$

以上より、全部あわせれば、80 通り　$\cdots(\text{答})\left(\boxed{\textbf{エオ}}\right)$

一方で、黒玉が含まれていないとき、

(i) 赤球 5 つ

(ii) 赤球 4 つ、白玉 1 つで書いてある数は一致しない

(iii) 赤球 3 つ、白玉 2 つで書いてある数は一致しない

(iv) 赤球 2 つ、白玉 3 つで書いてある数は一致しない

(v) 赤球 1 つ、白玉 4 つで書いてある数は一致しない

(vi) 白球 5 つ

の 6 つがある。

ここで、赤玉と白玉の役割を入れ替えれば、(i) と (vi)、(ii) と (v)、(iii) と (iv) はそれぞれ同じことである。

(i) や (vi) の組み合わせは、片一方の玉を 5 個全部取る組み合わせだから、

$${}_5\mathrm{C}_5 = 1 \text{ 通り}$$

(ii) や (v) の組み合わせは、片一方は 1 個の球をとり、それと一致しない数が書いてあるもう片方の玉は 4 つあるから、その 4 つから 4 つ選べばよくて、

$${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_4 = 5 \text{ 通り}$$

(iii) や (iv) の組み合わせは、片一方は 2 個の球をとり、それと一致しない数が書いてあるもう片方の玉は 3 つあるから、その 3 つから 3 つ選べばよくて、

${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_3 = 10$ 通り

以上より、全部あわせれば、32 通り　　$\cdots$(答)$\left(\boxed{\text{カキ}}\right)$

次に、1 点になるパターンを考える。

黒玉が含まれているとき、

(i) 赤球 3 つ、白玉 1 つで書いてある数は 3 つのうちどれかと一致

(ii) 赤球 2 つ、白玉 2 つで白玉の 2 つのうち 1 つの玉書いてある数が赤球の 2 つのうちどれか 1 つと一致し、もう一方の白玉は残りの 3 つの数のどれかの数がかいてあればよい

(iii) 赤球 1 つ、白玉 3 つで白玉のどれか 1 つが赤球の数と一致

の 3 つがある。

(i) の組み合わせは、

${}_5\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 30$ 通り

(ii) の組み合わせは、

${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 60$ 通り

(iii) の組み合わせは、

${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_1\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 = 30$ 通り

以上より、全部あわせれば、120 通り　　$\cdots$(答)$\left(\boxed{\text{クケコ}}\right)$

一方で、黒玉が含まれていないときは、

(i) 赤球 4 つ、白玉 1 つで 4 つのうちどれかと書いてある数が一致

(ii) 赤球 3 つ、白玉 2 つで 2 つのうちどれか 1 つは赤球の 3 つのうちどれか 1 つと一致し、もう一方の白玉の数は、それ以外の 2 つの数のどれかになればよい

(iii) 赤球 2 つ、白玉 3 つで 3 つのうちどれか 1 つは赤球の 2 つのうちどれか 1 つと一致し、もう一方の白玉の数は、それ以外の 3 つの数のどれかになればよい

(iv) 赤球 1 つ、白玉 4 つで 4 つのうちどれかと書いてある数が一致

の 4 つがある。

(i) や (iv) は役割入れ替えれば同じで、それぞれの組み合わせは、

${}_5\mathrm{C}_4 \times {}_4\mathrm{C}_1 = 20$ 通り

(ii) や (iii) は役割入れ替えれば同じで、それぞれの組み合わせは、

${}_5\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1 = 60$ 通り

以上より、全部あわせれば、160 通り　　$\cdots$(答)$\left(\boxed{\text{サシス}}\right)$

(2) 得点が 1 点になる組合せは全部で $120 + 160 = 280 = 40 \times 7$ 通りあるから、これを $462 = 11 \times 6 \times 7$ で割ってあげれば、得点が 1 点になる確率は、

$$\frac{40 \times 7}{11 \times 6 \times 7} = \frac{20}{11 \times 3} = \frac{20}{33} \qquad \cdots(\text{答})\left(\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}\right)$$

得点が 0 点になる組合せは全部で $80 + 32 = 112 = 16 \times 7$ 通りあるから、これを $462 = 11 \times 6 \times 7$ で割ってあげれば、得点が 1 点になる確率は、

$$\frac{16 \times 7}{11 \times 6 \times 7} = \frac{8}{11 \times 3} = \frac{8}{33}$$

したがって、得点が 2 点になる確率は、

$$1 - \left(\frac{20}{33} + \frac{8}{33}\right) = \frac{5}{33} \qquad \cdots(\text{答})\left(\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}\right)$$

よって、期待値を計算すると、

$$\frac{20}{33} \times 1 + \frac{5}{33} \times 2 = \frac{30}{33} = \frac{10}{11} \qquad \cdots(\text{答})\left(\frac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}\right)$$