2010 年実施センター試験 数学 II·B 解説

2010 年 1 月 21 日作成
2010 年 1 月 23 日修正

第 1 問

〔1〕 連立方程式

$$\begin{cases} xy = 128 & \cdots(1.1) \\ \dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_2 y} = \dfrac{7}{12} & \cdots(1.2) \end{cases}$$

を満たす正の実数 x, y を求める。
ただし、$x \neq 1, y \neq 1$ である。

公式 $\log xy = \log x + \log y$

より、式 (1.1) から、

$$\log_2 x + \log_2 y = 7 \cdots (1.3) \qquad \cdots(答)\left(\boxed{\textsf{ア}}\right)$$

一方、式 (1.2) について、左辺を変形すると、

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_2 y} = \frac{\log_2 x + \log_2 y}{(\log_2 x)(\log_2 y)}$$

したがって、式 (1.3) を分子に代入してあげれば、

$$\frac{7}{(\log_2 x)(\log_2 y)} = \frac{7}{12}$$

$$\therefore (\log_2 x)(\log_2 y) = 12 \cdots (1.4) \qquad \cdots(答)\left(\boxed{\textsf{イウ}}\right)$$

すると、式 (1.3) と式 (1.4) から、解が $\log_2 x, \log_2 y$ である 2 次方程式を考えることができる。
t を変数とすると、この 2 次方程式は解と係数の公式より、

$$t^2 - 7t + 12 = 0 \cdots (1.5) \qquad \cdots(答)\left(\boxed{\textsf{エ}},\ \boxed{\textsf{オカ}}\right)$$

となる。
式 (1.5) は、

$$(t-3)(t-4) = 0$$

となるから、(1.5) の解は $t = 3, 4$ $\qquad \cdots(答)\left(\boxed{\textsf{キ}},\ \boxed{\textsf{ク}}\right)$
$t = 3$ のとき、

$$\log_2 x = 3, \log_2 y = 4$$

$$\therefore x = 8, y = 16 \qquad \cdots(答)\left(\boxed{\textsf{ケ}},\ \boxed{\textsf{コサ}}\right)$$

また、$t = 4$ のとき、上の x と y が入れ替わって、

$$\log_2 x = 4, \log_2 y = 3$$

$$\therefore x = 16, y = 8$$

となる。

〔2〕 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して、

$$\sin 4\theta=\cos\theta\cdots(1.6) \qquad \cdots(答)\left(\boxed{\text{シ}}\right)$$

ここで、$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$(\because)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}\cos\theta-\cos\dfrac{\pi}{2}\sin\theta=\cos\theta$

したがって、

$$\sin 4\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であることと、$\sin X=\sin(\pi-X)$ に注意すれば、

$$\therefore 4\theta=\frac{\pi}{2}-\theta \text{ または } 4\theta=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{6} \text{ または } \theta=\frac{\pi}{10} \qquad \cdots(答)\left(\frac{\pi}{\boxed{\text{ス}}},\quad \frac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}\right)$$

ゆえに、$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ である。 $\cdots(答)\left(\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\right)$

一方で、式 (1.6) の左辺に 2 倍角の公式を適用すると、

$$2\sin 2\theta\cos 2\theta=\cos\theta \qquad \cdots(答)\left(\boxed{\text{ツ}}\right)$$

さらに 2 倍角の公式を左辺に適用すれば、

$$2\left(2\sin\theta\cos\theta\right)\left(1-2\sin^2\theta\right)=\cos\theta$$

$$\therefore\left(4\sin\theta-8\sin^3\theta\right)\cos\theta=\cos\theta \qquad \cdots(答)\left(\boxed{\text{テ}},\quad \boxed{\text{ト}}\right)$$

ここで、$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より、$\cos\theta>0$ だから、

$$8\sin^3\theta-4\sin\theta+1=0\cdots(1.7)$$

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ は式 (1.7) を満たすから、左辺を $2\sin\theta-1$(この解は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ である) で割ってあげると、

$$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0 \qquad \cdots(答)\left(\boxed{\text{ナ}},\quad \boxed{\text{ニ}}\right)$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

ここで、$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から、$\sin\theta>0$ なので、

$$\sin\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \qquad \cdots(答)\left(\frac{\boxed{\text{ヌネ}}+\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}\right)$$

第2問

k を実数とし、座標平面上に点 $P(1,0)$ をとる。

曲線 C を

$$y=-x^3+9x^2+kx=-x(x^2-9x-k)$$

とする。

(1) 点 $Q(t,-t^3+9t^2+kt)$ における曲線 C の接線を l とおくと、$y'=-3x^2+18x+k$ より接線 l は、

$$y-(-t^3+9t^2+kt)=(-3t^2+18t+k)(x-t)$$

また、この接線が点 P を通るから、

$$0-(-t^3+9t^2+kt)=(-3t^2+18t+k)(1-t)$$

$$\therefore t^3-9t^2-kt=-3t^2+18t+k+3t^3-18t^2-kt$$

$$\therefore -2t^3+12t^2-18t=k \qquad \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イウ}},\ \boxed{\text{エオ}}\right)$$

ここで、

$$p(t)=-2t^3+12t^2-18t$$

とおくと、

$$p'(t)=-6t^2+24t-18$$

だから、

$$-6t^2+24t-18=0$$

を解くと、

$$t=1,3$$

ポイント

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ に対して、

$f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ の解を $x=\alpha,\beta(\alpha<\beta)$ とすると、

$a>0$ ならば、$x=\alpha$ で極小値 $f(\alpha)$、$x=\beta$ で極大値 $f(\beta)$ をとる。

$a>0$ ならば、$x=\alpha$ で極大値 $f(\alpha)$、$x=\beta$ で極小値 $f(\beta)$ をとる。

したがって、$t=1$ で極小値 $f(1)=-8$ をとり、$t=3$ で極大値 $f(3)=0$ をとる。

$$\cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キク}},\ \boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$$

実際に増減表を書けば、

t		1		3	
$p'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$p(t)$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	0	$\searrow$

となる。

$y=k$ と $y=p(t)$ との交点の数は、点 P を通る曲線 C の接線の本数だから、

$$\begin{cases} k<-8 \text{ のとき } 1 \text{ 個} & \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{タ}}\right) \\ k=-8 \text{ のとき } 2 \text{ 個} & \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{シス}}\right) \\ -8<k<0 \text{ のとき } 3 \text{ 個} & \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{ソ}}\right) \\ k=0 \text{ のとき } 2 \text{ 個} & \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{サ}}\right) \\ 0<k \text{ のとき } 1 \text{ 個} & \cdots(\text{答})\left(\boxed{\text{セ}}\right) \end{cases}$$

となる。

(2) $k=0$ とすると、曲線 C は、

$y=-x^3+9x^2=-x^2(x-9)\cdots(2.1)$

一方で、曲線 D を、

$y=-x^3+6x^2+7x=-x(3x^2-6x-7)\cdots(2.2)$

とする。

式 (2.1) に式 (2.2) を代入すると、

$-x^3+9x^2=-x^3+6x^2+7x$

$\therefore 3x^2-7x=0$

$\therefore x=0,\ \dfrac{7}{3} \qquad \cdots(答)\left(\boxed{チ},\ \dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}\right)$

$-1\leq x\leq 2$ において、$-1\leq x\leq 0$ では曲線 C が上で曲線 D は下に、$0\leq 2$ においては曲線 D が上で曲線 C が下にある。

したがって、曲線 C と曲線 D および 2 直線 $x=-1, x=2$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和 S は、

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{0}\{(-x^3+9x^2)-(-x^3+6x^2+7x)\}dx+\int_{0}^{2}\{(-x^3+6x^2+7x)-(-x^3+9x^2)\}dx \\
&= \int_{-1}^{0}(3x^2-7x)dx+\int_{0}^{2}(-3x^2+7x)dx \\
&= \left[x^3-\frac{7}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-x^3+\frac{7}{2}x^2\right]_{0}^{2} \\
&= \left(1+\frac{7}{2}\right)+(-8+14) \\
&= \frac{21}{2} \qquad \cdots(答)\left(\frac{\boxed{トナ}}{\boxed{ニ}}\right)
\end{aligned} \tag{1}$$

第3問

自然数の列

$1, 2, 3, 4, 5, \cdots$

に対して、第 n 群には $(3n-2)$ 個の項からなるものを考える。

a_n を第 n 群の最後の項とする。

(1) $a_1 = 1, a_2 = 1+4 = 5, a_3 = 1+4+7 = 12$ である。 $\cdots$(答) $\left(\boxed{\text{アイ}}\right)$

第 n 群の最後の項と第 $n-1$ 群の最後の項の間にはちょうど $(3n-2)-1$ 個の項があるから、

$a_n - a_{n-1} = 3n-2 \quad \cdots$(答) $\left(\boxed{\text{ウ}}, \ \boxed{\text{エ}}\right)$

したがって、

$$\begin{aligned} a_n &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 \\ &= \sum_{k=2}^{n}(3k-2) + a_1 \\ &= \sum_{k=1}^{n}(3k-2) - (3-2) + a_1 \\ &= \frac{3}{2}n(n+1) - 2n - 1 + 1 \\ &= \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \qquad \cdots(\text{答}) \left(\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}, \ \boxed{\text{キ}}, \ \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

となる。

$a_n = 600$ の項を考える。

$\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n < 600$

を解くが、普通に因数分解するのは大変なので、

$3n^2 - n < 1200$

$n(3n-1) < 1200$

と変形する。

$n(3n-1) < 3n^2$

だから、$3n^2 = 1200$ を解くと $n = 20$

つまり、大体 $n = 20$ の近くにあるということがわかるから、$n = 20$ を代入すると、

$a_{20} = \frac{3}{2} \times 400 - \frac{1}{2} \times 20 = 600 - 10 = 590$

したがって、$a_{21} > 600$ であるのは容易に想像がついて、600 は第 20 群の最終項よりも大きい。

よって、600 は、第 21 群の小さいほうから 10 番目の項である。 $\cdots$(答) $\left(\boxed{\text{コサ}}, \ \boxed{\text{シス}}\right)$

(2) $n = 1, 2, 3$ に対して、第 $(n+1)$ 群の小さいほうから $2n$ 番目の項を b_n とすると、

$b_n = a_n + 2n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n = \frac{3}{2}n(n+1) \quad \cdots$(答) $\left(\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}, \ \boxed{\text{タ}}, \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\right)$

$\therefore \frac{1}{b_n} = \frac{2}{3}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \quad \cdots$(答) $\left(\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}, \ \boxed{\text{ナ}}\right)$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2}{3}\frac{n}{n+1} = \frac{2n}{3n+3} \quad \cdots$(答) $\left(\frac{\boxed{\text{ニ}}n}{\boxed{\text{ヌ}}n + \boxed{\text{ネ}}}\right)$

第 4 問

$\angle EAB = \angle DAB = \dfrac{\pi}{2}$ だから、

$$\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q} = \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r} = 1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \cdots(答)\left(\boxed{\text{ア}}\right)$$

$\angle EAD = \dfrac{\pi}{3}$ だから、

$$\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r} = 1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \qquad \cdots(答)\left(\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\right)$$

点 X は辺 AB を $a:(1-a)$ に内分する点で、点 Y は辺 BF を $b:(1-b)$ に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BY} = (1-a)\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BF} = (1-a)\overrightarrow{p} + b\overrightarrow{r} \qquad \cdots(答)\left(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}}\right)$$

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{p} + \overrightarrow{q} - \overrightarrow{r}$、$\overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{q} + \overrightarrow{r}$ だから、

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{XZ} = (\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q} - \overrightarrow{r})\cdot(\overrightarrow{q} + \overrightarrow{r})\\
&= \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q} + \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r} + |\overrightarrow{q}|^2 + \overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{q} - |\overrightarrow{r}|^2\\
&= 0 + 0 + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1\\
&= 0 \qquad \cdots(答)\left(\boxed{\text{カ}}\right)
\end{aligned}$$

よって、$EC \perp XZ$

(2) 直線 EC と平面 α が垂直に交わるとし、その交点を K とする。

$\overrightarrow{EC}$ が三角形 XYZ の 2 辺と垂直であることから、$XY \perp EC$ なので、

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{EC} = 0\\
&((1-a)\overrightarrow{p} + b\overrightarrow{r})\cdot(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q} - \overrightarrow{r}) = 0\\
&(1-a) + \frac{1}{2}b - b = 0\\
&\therefore 2a + b = 2 \qquad \cdots(答)\left(\boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{ク}}\right)
\end{aligned}$$

以下 $b = \dfrac{1}{2}$ とする。すると、$a = \dfrac{3}{4}$ である。 $\cdots(答)\left(\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)$

c を実数として $\overrightarrow{EK} = c\overrightarrow{EC}$ と表すと、

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AE} + c\overrightarrow{EC}$$

一方、点 K は平面 α 上にあるから、s, t を実数として、

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AX} + s\overrightarrow{XY} + t\overrightarrow{XZ}\\
&= \frac{3}{4}\overrightarrow{p} + s\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{p} + \frac{1}{2}\overrightarrow{r}\right) + t\,(\overrightarrow{q} + \overrightarrow{r})\\
&= \left(\frac{1}{4}s + \frac{3}{4}\right)\overrightarrow{p} + t\overrightarrow{q} + \left(\frac{1}{2}s + t\right)\overrightarrow{r} \qquad \cdots(答)\left(\frac{1}{\boxed{\text{サ}}},\ \frac{1}{\boxed{\text{シ}}}\right) \qquad (3)\\
&= \overrightarrow{AE} + \left(\frac{1}{4}s + \frac{3}{4}\right)\overrightarrow{p} + t\overrightarrow{q} + \left(\frac{1}{2}s + t - 1\right)\overrightarrow{r}
\end{aligned}$$

と表される。

したがって、

$$\begin{cases}
\dfrac{1}{4}s + \dfrac{3}{4} = c\\
t = c\\
\dfrac{1}{2}s + t - 1 = -c
\end{cases}$$

を解くと、

$$\begin{cases} s = -\dfrac{1}{2} \\ t = c = \dfrac{5}{8} \end{cases} \qquad \cdots(\text{答}) \left(c = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \right)$$

よって、点 E と平面 α との距離 $|\overrightarrow{EK}|$ は、

$$|\overrightarrow{EK}| = \frac{5}{8}|\overrightarrow{EC}| = \frac{5}{8}\sqrt{|\overrightarrow{EC}|^2} = \frac{5\sqrt{2}}{8} \qquad \cdots(\text{答}) \left(\frac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}} \right)$$

第 6 問

(1) $a \leq b \leq c$ より、

$$N = a + b + c \geq a + a + a = 3a$$

$$\therefore a \leq \frac{N}{3}$$

(2) $N = 20$ とすうｒ。このとき、(1) より、a の取りうる最大の数は、6 である。

$a = 3$ とするとき、$b + c = 17$ だから、

$$17 = b + c \geq b + b = 2b$$

$$\therefore 3 \leq b \leq 8$$

したがって、このときの b, c $(3 \leq b \leq c)$ は全部で 6 組

(3) $\mathtt{A} = a$ に対して、$b + c = N - a =$ N-A であり、$a \leq b \leq c$ であるから、$\mathtt{A} = a$ のときに満たす b, c の組は、

$$\left(\mathtt{INT}\frac{\mathtt{N} - \mathtt{A}}{2}\right) - \mathtt{A} + 1 \text{ 個}$$

したがって、$\boxed{\text{エ}}$ は X=X+INT((N-A)/2)-A+1

$N = 13$ を入力したとき、130 行目は、A=1 から A=INT(13/3)=4 まで実行するから全部で 4 回実行される。

一方、150 行目で出力される X の値は、

$$\left\{\mathtt{INT}\left(\frac{13-1}{2}\right) - 1 + 1\right\} + \left\{\mathtt{INT}\left(\frac{13-2}{2}\right) - 2 + 1\right\}$$

$$+ \left\{\mathtt{INT}\left(\frac{13-3}{2}\right) - 3 + 1\right\} + \left\{\mathtt{INT}\left(\frac{13-4}{2}\right) - 4 + 1\right\}$$

$$= 6 + 4 + 3 + 1$$

$$= 14$$

(4) まず、$\boxed{\text{ク}}$ について、$a \leq b \leq c$ の順序を保ち、また、$b \leq \frac{N-a}{2}$ だから、

A TO INT((N-A)/2)

となる。次に、$\boxed{\text{ケ}}$ について、$N = a + b + c$ より、C に入れるべき値は、

N-A-B

$\boxed{\text{コ}}$ について、1 つの長さが他の 2 つの長さの和よりも小さいことが条件である。

ところが、A<B+C は上の構文 (A≦B≦(INT((N-A)/2))) から常に成立するので C を制御する条件式として不適切。

B<A+C についても同じく不適切。

また、A<B+C+1 や B<A+C+1、C<A+B+1 は三角形の長さの条件ではないので不適切。

したがって、C<A+B が正しい。

$\boxed{\text{サ}}$ について、条件にあったものをカウントするのがこのプログラムの目的だから、

X=X+1

となる。

最後に、N に 13 を入力したときに 150 行で出力される X の値は 5 である。

補足として、N=13 のときの組み合わせは、

$$(a, b, c) = (1, 6, 6),\ (2, 5, 6),\ (3, 4, 6),\ (3, 5, 5),\ (4, 4, 5)$$

である。