センター試験 (2011 年実施) 数学 I·A 解説

2011 年 1 月 16 日作成
2011 年 1 月 27 日修正

第 1 問

〔1〕 $a = 3 + 2\sqrt{2},\ b = 2 + \sqrt{3}$ とすると、

$$|a|^2 = (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1$$
$$|b|^2 = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

なので、

$$\frac{1}{a} = \frac{\bar{a}}{|a|^2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{1} = 3 - 2\sqrt{2} \qquad (\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{ウ}})$$
$$\frac{1}{b} = \frac{\bar{b}}{|b|^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1} = 2 - \sqrt{3} \qquad (\boxed{\text{エ}} \sim \boxed{\text{オ}})$$

そこで、それぞれ普通に計算すると、

$$\frac{a}{b} = (3 + 2\sqrt{2})(2 - \sqrt{3}) = 6 + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$$
$$\frac{b}{a} = (2 + \sqrt{3})(3 - 2\sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$$

よって、

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 8\sqrt{2} - 6\sqrt{3} \qquad (\boxed{\text{カ}} \sim \boxed{\text{ケ}})$$
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 12 - 4\sqrt{6}$$

ここでポイントなのは、下の式を予(あらかじ)め計算しておくと、次の不等式の計算が楽になることである。
　さて、不等式

$$|2abx - a^2| < b^2$$

を満たす x の範囲を求めたい。
ところで、$a, b > 0$ だから、まずは普通に絶対値を外し、整理していくと、

$$-b^2 < 2abx - a^2 < b^2$$
$$\therefore\ a^2 - b^2 < 2abx < a^2 + b^2$$
$$\therefore\ \frac{a}{b} - \frac{b}{a} < 2x < \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

となる。
ここで大切なのは、$a, b > 0$ だから、いくらかけても割っても不等号の向きは変わらないというところである。
さらに、各辺で、あらかじめ計算しておいた文字式が表れているから代入すると、

$$8\sqrt{2} - 6\sqrt{3} < 2x < 12 - 4\sqrt{6}$$
$$\therefore 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} < x < 6 - 2\sqrt{6} \qquad (\boxed{\text{コ}} \sim \boxed{\text{タ}})$$

と x の値の範囲が求まった。

〔2〕 実数 a, b に関する条件 p, q を次のように定める。

$$p : (a+b)^2 + (a-2b)^2 < 5$$
$$q : |a+b| < 1 \text{ または } |a-2b| < 2$$

(1) 命題「$q \Longrightarrow p$」に対する反例を見つける。
つまり、q では成り立っているが、p では成り立っていないものを見つければよい。
まず、**2** は p, q ともに満たさないので除外。
それ以外について、実際に代入すると、q を満たすことがわかる。
ところが一方、その 3 つの中で **3** のみ p を満たさないので、これが反例である。
(2) 命題「$p \Longrightarrow q$」の対偶を考える。
つまり、「q の否定」が成り立てば「p の否定」が成り立つということであるから、
「$(a+b)^2 + (a-2b)^2 \geq 5$」$\Longrightarrow$「$|a+b| \geq 1$ かつ $|a-2b| \geq 2$」
したがって、$\boxed{\text{ツ}}$ は **7**、$\boxed{\text{テ}}$ は **4** となる。
(3) p は q であるための条件を求めたい。
ここで、$X = a+b, Y = a-2b$ と置いてみよう。
すると、$\overline{p}, \overline{q}$ の条件は、

$$\overline{p} : X^2 + Y^2 \geq 5$$
$$\overline{q} : |X| \geq 1 \text{ かつ } |Y| \geq 2$$

と言い換えられる。
$\overline{p}$ のほうは、全体から円盤をくりぬいた (境界込み) の領域に対し、
$\overline{q}$ のほうは、全体から長方形をくりぬいた (境界込み) の領域になる。
したがって、これらを図に表わせば、$\overline{q}$ の領域は $\overline{p}$ の領域に含まれている。
これは、「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ だが、$\overline{p} \not\Rightarrow \overline{q}$」ということである。
対偶をとれば、「$p \Rightarrow q$ だが、$q \not\Rightarrow p$」ということである。
よって、p は q であるための十分条件であるが、必要条件ではない。
ゆえに、$\boxed{\text{ト}}$ は **2** となる。

第 2 問

a, b, c を定数とし、$a \neq 0, b \neq 0$ とする。グラフ G について、

$$G : y = ax^2 + bx + c$$

で与えられている。

グラフ G が $y = -3x^2 + 12bx$ のグラフと同じ軸を持つので、まず、

$$y = -3x^2 + 12bx = -3(x - 2b)^2 + 48b^2$$

となって、軸は $x = 2b$ だとわかる。

ちなみに、微積分を理解していれば、

$$y' = -6x + 12b$$

なので、$y' = 0$ というのはつまり頂点で接するということだから、

$$y' = -6x + 12b = 0$$
$$\therefore\ x = 2b$$

となって、頂点の x 座標が $2b$ とわかり、すなわち、軸が $x = 2b$ だとわかる。

さて、グラフ G について平方完成すると、

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

したがって、グラフ G の軸は $x = -\frac{b}{2a}$ なので、仮定から、

$$-\frac{b}{2a} = 2b$$
$$\therefore\ a = -\frac{1}{4} \qquad (\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{ウ}})$$

さらに、グラフ G が点 $(1, 2b - 1)$ を通るので、代入すると、

$$2b - 1 = -\frac{1}{4} \times 1^2 + b \times 1 + c$$
$$\therefore\ c = b - \frac{3}{4} \qquad (\boxed{\text{エ}} \sim \boxed{\text{オ}})$$

という関係式を得る。

以下、a, b, c に関してこの 2 つの条件を満たすグラフ G について考える。

(1) G と x 軸が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲を求める。

2 次方程式

$$-\frac{1}{4}x^2 + bx + \left(b - \frac{3}{4}\right) = 0$$

の判別式を D と置くと、

$$D = b^2 + 4 \times \frac{1}{4}\left(b - \frac{3}{4}\right) = b^2 + b - \frac{3}{4} = \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \left(b - \frac{1}{2}\right)\left(b + \frac{3}{2}\right)$$

今、2 点で交わるので、$D > 0$ だから、

$$D = \left(b - \frac{1}{2}\right)\left(b + \frac{3}{2}\right) > 0$$
$$\therefore\ b < -\frac{3}{2},\ \frac{1}{2} < b \qquad (\boxed{\text{カ}} \sim \boxed{\text{コ}})$$

さらに、グラフ G と x 軸の性の部分が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲を求めるには、

- G が x 軸と 2 点で交わる。(上で求めた範囲)
- G の軸が $x > 0$ である。
- グラフ G は上に凸なグラフだから、$x = 0$ のときの値は負である。

を満たす範囲となる。

まず、G の軸が $x > 0$ となるから、

$$2b > 0$$
$$\therefore \ b > 0$$

最後の条件について、$x = 0$ を代入すると、

$$b - \frac{3}{4} < 0$$
$$\therefore b < \frac{3}{4}$$

したがって、3 つの条件を合わせれば、

$$\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4} \qquad (\boxed{\text{サ}}\sim\boxed{\text{セ}})$$

となる。

(2) $b > 0$ とする。
$0 \leq x \leq b$ におけるグラフ G の最小値が $-\frac{1}{4}$ である時、
頂点は $x = 2b$ にあるのだから、$0 \leq x \leq b$ では単調に右上がりのグラフとなる。
したがって、最小値は $x = 0$ の時だから、

$$b - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$
$$\therefore \ b = \frac{1}{2} \qquad (\boxed{\text{ソ}}\sim\boxed{\text{タ}})$$

となる。

一方、$x \geq b$ におけるグラフ G の最大値が 3 である時、
頂点は $x = 2b$ であり、$0 < b < 2b$ だから、$x = 2b$ の時最大値である。
ところで、グラフ G を平方完成すると、

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + b - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}(x - 2b)^2 + b^2 + b - \frac{3}{4}$$

となるから、頂点は $(2b, b^2 + b - \frac{3}{4})$ となる。
今、$x = 2b$ で最大値 3 となるから、すなわち頂点が $(2b, 3)$ となるということなので、

$$b^2 + b - \frac{3}{4} = 3$$
$$\therefore \ \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 = 3 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 4$$
$$\therefore b = -\frac{1}{2} \pm 2 = \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$$
$$\therefore b = \frac{3}{2} \qquad (\because b > 0) \qquad (\boxed{\text{チ}}\sim\boxed{\text{ツ}})$$

となる。

$b = \frac{1}{2}$ のとき、グラフ G_1 とする。この時、グラフ G_1 の頂点を求めると、$(1, 0)$ となり、一方、$b = \frac{3}{2}$ のとき、グラフ G_2 とする。この時、グラフ G_2 の頂点を求めると、$(3, 3)$ となる。
したがって、グラフ G_1 を x 方向に 2、y 方向に 3 ずらせばグラフ G_2 と重なる。 $(\boxed{\text{テ}}\sim\boxed{\text{ト}})$

第3問

点Oを中心とする円Oの円周上に4点A,B,C,Dがこの順にあり、$AB=\sqrt{7}, BC=2\sqrt{7}, CD=\sqrt{3}, DA=2\sqrt{3}$であるとする。

(1) $\angle ABC=\theta, AC=x$とおく。

まず、$\triangle ABC$に関して余弦定理を用いると、

$$x^2=(\sqrt{7})^2+(2\sqrt{7})^2-2\cdot\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}\cos\theta$$
$$\therefore\ x^2=35-28\cos\theta \qquad (\boxed{\text{ア}}\sim\boxed{\text{イ}})$$

となる。

一方、$\triangle ACD$に関して余弦定理を用いると、

$$x^2=(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cos(180^\circ-\theta)$$
$$\therefore\ x^2=15+12\cos\theta \qquad (\boxed{\text{ウ}}\sim\boxed{\text{エ}})$$

となる。

辺々引き算してx^2を消去すれば、

$$0=20-40\cos\theta$$
$$\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{2} \qquad (\boxed{\text{オ}}\sim\boxed{\text{カ}})$$
$$\therefore\ \theta=60^\circ, 120^\circ$$

となる。

また、$\cos\theta=\frac{1}{2}$を代入すると、

$$x^2=15+12\times\frac{1}{2}=21$$
$$\therefore\ x=\sqrt{21} \qquad (\boxed{\text{キ}}\sim\boxed{\text{ク}})$$

と求まる。

一方で、$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$とわかるので、正弦定理より、

$$2R=\frac{AC}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{7}$$
$$\therefore\ R=\sqrt{7} \qquad (\boxed{\text{ケ}})$$

$AB=\sqrt{7}, BC=2\sqrt{7}, CA=\sqrt{21}$より、$\triangle ABC$は$\angle BAC=90^\circ$の直角三角形で、点$O$は$BC$の中点となり、$\angle ABC=60^\circ, \angle ACB=30^\circ$となる。

したがって、四角形$ABCD$の面積は、

$$(\text{四角形 } ABCD)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3} \qquad (\boxed{\text{コ}}\sim\boxed{\text{サ}})$$

となる。

(2) 点Aにおける円Oの接戦と点Dにおける円Oの接線の交点Eとする。

OAは円Oの半径だから、点Aでの円Oの接線と、OAは直交するので、

$$\angle OAE=90^\circ \qquad (\boxed{\text{シ}}\sim\boxed{\text{ス}})$$

同様にして、

$$\angle ODE=90^\circ$$

また、線分 OE と辺 AD との交点を F とすると、

$$\angle AFE = 90^\circ$$

なぜなら、$OA = OD$ であり、OE は共通、$\angle OAE = \angle ODE = 90^\circ$ となって、$\triangle OAE \equiv \triangle ODE$
したがって、$\angle AEO = \angle DEO$
一方、接弦定理より、$\angle EAD = \angle ACD = \angle EDA$ なので、$\triangle EAF \equiv \triangle EDF$
ゆえに、$\angle AFE = 90^\circ$ となる。　(**セ**〜**ソ**)

$\triangle OAF$ と $\triangle OEA$ は 2 角がそれぞれ等しいので、$\triangle OAF \backsim \triangle OEA$
よって、

$$OF : OA = OA : OE$$
$$\therefore OF \cdot OE = OA^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \qquad (\boxed{タ})$$

さらに、辺 AD の延長と線分 OC の延長の交点を G とする。点 R から直線 OG に垂線をおろし、直線 OG との交点を H とする。
すると、辺 EG に着目すると、

$$\angle EFG = 180^\circ - \angle EFA = 90^\circ$$
$$\angle EHG = 90^\circ$$

より、円周角の一致から、点 E, G, H, F は同一円周上に存在する。　($\boxed{チ}$=**2**)
ゆえに、方べきの定理より、

$$OH \cdot OG = OF \cdot OE = 7 \qquad (\boxed{ツ})$$

となる。

第 4 問

1 個のさいころを投げる。

4 以下の目が出る確率 p は、1〜6 のうち $1, 2, 3, 4$ のでる確率だから、

$$p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad (\boxed{\text{ア}}\sim\boxed{\text{イ}})$$

となり、5 以上の目が出る確率は、

$$q = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad (\boxed{\text{ウ}}\sim\boxed{\text{エ}})$$

となる。

ちなみに、q は p の余事象だから、

$$q = 1 - p = \frac{1}{3}$$

としても求まる。

このさいころを 8 回繰り返して投げる。

(1) 8 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回でる確率は、

$$\begin{aligned} {}_8\mathrm{C}_3 p^3 q^5 &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} p^3 q^5 \qquad (\boxed{\text{オ}}\sim\boxed{\text{カ}}) \\ &= 56 p^3 q^5 \end{aligned}$$

次に、第 1 回目に 4 以下の目が出て、さらに次の 7 回の中で 4 以下の目がちょうど 2 回出る確率は、

$$\begin{aligned} p \cdot {}_7\mathrm{C}_2 p^2 q^5 &= \frac{7 \cdot 6}{2} p^3 q^5 \qquad (\boxed{\text{キ}}\sim\boxed{\text{ク}}) \\ &= 21 p^3 q^5 \end{aligned}$$

最後に、第 1 回目に 5 以上の目が出て、さらに次の 7 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出る確率は、

$$\begin{aligned} q \cdot {}_7\mathrm{C}_3 p^3 q^4 &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} p^3 q^5 \qquad (\boxed{\text{ケ}}\sim\boxed{\text{コ}}) \\ &= 35 p^3 q^5 \end{aligned}$$

(2) **0**〜**7** の 8 つの選択肢のうち、56 になるものを選ぶ。

ここで注目すべきことは、${}_n\mathrm{C}_k = {}_n\mathrm{C}_{n-k}$ より、**0** と **4** は同じ値。

同様に、**1** と **5**、**2** と **6**、**3** と **7** はそれぞれ同じ値となる。

さて、パスカルの三角形を知っているならば、${}_8\mathrm{C}_3$ と同じ値なものは ${}_7\mathrm{C}_2 + {}_7\mathrm{C}_3$ である。 $(\boxed{\text{サ}}\sim\boxed{\text{シ}})$

普通に計算しても求まる。特に前半の積の形で書かれているものは、途中計算で明らかに 56 にならないのがわかるのでそこで計算をやめれば良い。

(3) 得点を次のように定める。

8 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回でた場合について考える。

さて、$n = 1, 2, \cdots, 6$ として、第 n 回目に初めて 4 以下の目が出たとき、得点は n 点とする。

また、4 以下の目が出た回数がちょうど 3 回とならないときは得点を 0 点とする。

期待値を求める問題があるので次のような表を組むと計算しやすい。

得点 n	確率の計算式	確率の p^3q^5 の係数	確率と得点の積
1	$p \cdot {}_7\mathrm{C}_2 p^2 q^5$	35	$35p^3q^5$
2	$q \cdot p \cdot {}_6\mathrm{C}_2 p^2 q^4$	15	$30p^3q^5$
3	$q^2 \cdot p \cdot {}_5\mathrm{C}_2 p^2 q^3$	10	$30p^3q^5$
4	$q^3 \cdot p \cdot {}_4\mathrm{C}_2 p^2 q^2$	6	$24p^3q^5$
5	$q^4 \cdot p \cdot {}_3\mathrm{C}_2 p^2 q^1$	3	$15p^3q^5$
6	$q^5 \cdot p \cdot {}_2\mathrm{C}_2 p^2$	1	$6p^3q^5$

したがって、この表を用いれば、得点が 6 点となる確率は、p^3q^5 である。　　（$\boxed{\text{ス}}$〜$\boxed{\text{セ}}$）
一方、得点が 3 点となる確率は、$10p^3q^5$ となる。　　（$\boxed{\text{ソ}}$〜$\boxed{\text{タ}}$）
また、得点の期待値は、表の右の列を足せばよくて、

$$
\begin{aligned}
(\text{期待値}) &= 35p^3q^5 + 30p^3q^5 + 30p^3q^5 + 24p^3q^5 + 15p^3q^5 + p^3q^5 \\
&= 126p^3q^5 \\
&= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7p^3q^5 \\
&= \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7^3}{3^3 \cdot 3^5} \\
&= \frac{2 \cdot 7 \cdot 2^3}{3^6} \\
&= \frac{112}{729} \qquad (\boxed{\text{チ}}\sim\boxed{\text{ニ}})
\end{aligned}
$$

となる。