2016 年センター数学 IIB 解答解説 Version1.0

@aporia_life

2016 年 1 月 17 日作成
2016 年 1 月 18 日更新

第 1 問

[1] (1) $8^{\frac{5}{6}} = (2^3)^{\frac{5}{6}} = 2^{3\times\frac{5}{6}} = 2^{\frac{5}{2}} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$$\log_{27}\frac{1}{9} = \frac{\log_3 27}{\log_3 \frac{1}{9}} = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 3^{-2}} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

(2) $y = 2^x$ のグラフと $y = (\frac{1}{2})^x$ のグラフは y 軸で対称である。

$y = 2^x$ のグラフと $y = \log_2 x$ のグラフについて、逆関数の関係であるから、直線 $y = x$ に関して対称である。

$y = \log_2 x$ のグラフと $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフについて、

$\log_{\frac{1}{2}} x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 x$ である。

よって、x 軸に関して対称である。

$y = log_2 x$ のグラフと $y = \log_2 \dfrac{1}{x}$ について、

$\log_2 \dfrac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x$ である。

よって、x 軸に関して対称である。

(3) $x > 0$ の範囲における関数 $y = (\log_2 \dfrac{x}{4})^2 - 3\log_4 x + 3$ の最小値を求めよう。

$t = \log_2 x$ と置く。

ここで、それぞれ変換の計算をしておく。

$$\log_2 \frac{x}{4} = \log_2 x - \log_2 4 = \log_2 x - 2$$

一方で、

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$$

これらを用いれば、

$$y = (t-2)^2 - 4\times\frac{t}{2} + 3 = t^2 - 4t + 4 - 2t + 3 = t^2 - 6t + 7$$

である。また、x が $x > 0$ を動くとき、t の取り得る値の範囲は $-\infty\ = \log_2 0 < t < \log_2 \infty\ = \infty$ より、実数全体である。

したがって、y の式を平方完成していくと、$y = (t-3)^2 - 2$ となるので、

$t = 3$ の時最小値 -2 である。

ここで、$t = \log_2 x = 3$ を解く。

$$x = 2^3 = 8$$

[2] k を正の定数として、

$$\cos^2 x - \sin^2 x + k(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}) = 0$$

を満たす x について考える。

(1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で上の式を満たす x の個数について考える。

両辺に $\sin^2 x \cos^2 x$ をかけると、

$$\sin^2 x \cos^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x) + k(\sin^2 x - \cos^2 x) = 0$$

ここで、2 倍角の公式

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

を用いると、

$$\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \times \cos 2x + k \times (-\cos 2x) = 0$$

$$\left(\frac{\sin^2 2x}{4} - k\right) \cos 2x = 0$$

を得る。

したがって、k の値に関係なく、$\cos 2x = 0$ となる場合を考えると上の式を満たすので、この時の x を求める。

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \cdots$$

ここで、$0 < x < \frac{\pi}{2}$ であるから、このときの x は $x = \frac{\pi}{4}$ である。

また、$0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲では、

$$0 < 2x < \pi$$

$$0 < \sin 2x < 1$$

$$0 < \sin^2 2x \leqq 1$$

である。

よって、$4k > 1$ のとき、

$\sin^2 2x - 4k < 0$ であるから、$\sin^2 2x - 4k = 0$ を満たす解 x は存在せず、$\cos 2x = 0$ から導かれる解 $x = \frac{\pi}{4}$ のみになる。

つまり、$k > \frac{1}{4}$ のとき、解 x は $\frac{\pi}{4}$ のみである。

一方、$0 < k < \frac{1}{4}$ のとき、$\sin^2 2x - 4k = 0$ を解いた解 x が 2 つと $\cos 2x = 0$ から導かれる解 $x = \frac{\pi}{4}$ の 3 個になる。

最後に、$k = \frac{1}{4}$ のとき、$\sin^2 2x - 1 = 0$ を解くと、

$$\sin 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

となるので、解 x の個数は 1 個となる。

(2) $k=\dfrac{4}{25}$ とし、$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で満たす x について考えよう。

ここで、$\dfrac{\pi}{2}<2x<\pi$ であることに注意する。

$$\left(\frac{\sin^2 2x}{4}-k\right)\cos 2x=0$$

より、

$$\frac{\sin^2 2x}{4}=\frac{4}{25}$$

$$\sin^2 2x=\frac{16}{25}$$

$$\sin 2x=\frac{4}{5}$$

であるから、

$$\cos 2x=-\frac{3}{5}$$

である。したがって、2 倍角の公式を用いると、

$$-\frac{3}{5}=2\cos^2 x-1$$

$$2\cos^2 x=\frac{2}{5}$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{5}=\frac{5}{25}$$

$\cos x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ である。

第 2 問

座標平面上で、放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ を C_1 とし、放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ を C_2 とする。

(1) 実数 a に対して、2 直線 $x=a, x=a+1$ と C_1, C_2 で囲まれた図形 D の面積を考えると、

$$\begin{aligned}
S&=\int_a^{a+1}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x^2\right)dx\\
&=\int_a^{a+1}\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\right)dx\\
&=\left[\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x\right]_a^{a+1}\\
&=\left(\frac{1}{12}(a+1)^3+\frac{1}{2}(a+1)\right)-\left(\frac{1}{12}a^3+\frac{1}{2}a\right)\\
&=\frac{1}{12}a^3+\frac{3}{12}a^2+\frac{3}{12}a+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}a^3-\frac{1}{2}a\\
&=\frac{3}{12}a^2+\frac{3}{12}a+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\\
&=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}a+\frac{7}{12}
\end{aligned}$$

である。

これを平方完成すると、

$$S=\frac{1}{4}\left(a^2+a\right)+\frac{7}{12}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\} + \frac{7}{12}$$
$$= \frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{16} + \frac{7}{12}$$
$$= \frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{48} + \frac{28}{48}$$
$$= \frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{48}$$

よって、S は、$a = \frac{-1}{2}$ のとき、最小値 $\frac{25}{48}$ をとる。

(2) 4 点 $(a,0),(a+1,0),(a+1,1),(a,1)$ を頂点とする正方形を R で表す。
a が $a \geqq 0$ の範囲を動くとき、正方形 R と (1) の図形 D の共通部分の面積を T と置く。T が最大となる a の値を求めよう。

直線 $y=1$ との交点を考える。
C_1 については、
$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = 1$$
$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$
よって、$(\pm 1, 1)$ で交わる。

同様に、C_2 については、
$$\frac{1}{4}x^2 = 1$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$
よって、$(\pm 2, 1)$ で交わる。

したがって、正方形 R と図形 D の共通部分が空集合になるとき、図形 R は曲線 C_2 より下にあるので、
$2 < a$ のとき空集合になるから、空集合にならないのは、$0 \leqq a \leqq 2$ のときである。

$1 \leqq a \leqq 2$ のとき、正方形 R は放物線 C_1 と x 軸の間にあり、この範囲で a が増加する時、T は減少する。
なぜなら、すでに C_1 より下の領域にあって一定で増えることはないが、徐々に C_2 の領域が増えてきて、全体的に T の面積が減少する。

したがって、T が最大になる a の値は、$0 \leqq a \leqq 1$ の範囲にある。
$0 \leqq a \leqq 1$ のとき、(1) の図形 D のうち、正方形 R の外側の部分の面積を求める。

図を書くと、外側にはみ出るのは、$1 \leqq x \leqq a+1$ のところのみであるから、
$$U = \int_1^{a+1} \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - 1\right) dx$$
$$= \int_1^{a+1} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x\right]_1^{a+1}$$
$$= (\frac{1}{6}(a+1)^3 - \frac{1}{2}(a+1)) - (\frac{1}{6} - \frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{6}a^3 + \frac{3}{6}a^2 + \frac{3}{6}a + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{6}a^3 + \frac{3}{6}a^2$$
$$= \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2$$
である。よって、$0 < a < 1$ において、面積 T は S から U を引けばよいので、
$$T = (\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a + \frac{7}{12}) - (\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2)$$
$$= -\frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a + \frac{7}{12}$$
である。

T を a の関数とみて微分すると、
$$T' = -\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4} = 0$$
を解く。
$$2a^2 + 2a - 1 = 0$$
$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{2}$$
$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$
ここで、関数 T の a^3 の係数が負なので、$a = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ のとき最大値をとる。

第 3 問

真分数を分母の小さい順に、分母が同じ場合には分子の小さい順に並べてできる数列を a_n とする。真分数とは、分子と分母がともに自然数で、分子が分母より小さい分数の事であり、上野数列では、約分できる形の分数も含めて並べている。以下の問題に分数形で解答する時は、解答上の注意にあるように、それ以上約分できない形で答えよ。

(1) a_{15} について考える。

$15 = 1+2+3+4+5$ であるから、分母は 6 で、分子は 5 となる。つまり、$a_{15} = \dfrac{5}{6}$ である。

また、分母に初めて 8 が現れる時を考える。つまり、分母が 7 のときの最大の値 $\dfrac{6}{7}$ になるのは、
$$1+2+3+4+5+6 = 21 \text{ 番目}$$
だから、初めて分母に 8 が現れるのは、a_{22} である。

(2) k を 2 以上の自然数とする。数列 $\{a_n\}$ において、$\dfrac{1}{k}$ が初めて現れる項を第 M_k 項とし、$\dfrac{k-1}{k}$ が初めて現れる項を第 N_k 項とする。

分母に初めて k が現れる $\dfrac{1}{k}$ の 1 個手前の項は $\dfrac{k-2}{k-1}$ であるから、
$$M_k = 1+2+\cdots+k-2 = \frac{1}{2}(k-2)(k-2+1) = \frac{1}{2}(k-2)(k-1) = \frac{1}{2}k^2 - \frac{3}{2}k + 2$$
一方で、
$$N_k = 1+2+\cdots+k-1 = \frac{1}{2}(k-1)(k-1+1) = \frac{1}{2}(k-1)k = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k$$
である。

第 104 項の a_{104} について考える。

$N_k \leqq 104$ を解いてみると、
$$\frac{1}{2}(k-1)k \leqq 104$$
$$(k-1)k \leqq 208$$

ここで、$13 \times 14 = 182$、$14 \times 15 = 210$ であるから、$k = 14$ が最大の k である。

すると、$a_{91} = \dfrac{13}{14}$ であり、$104 - 91 = 13$ であるから、次の分母 15 のときの分子 13 が a_{104} である。

よって、$a_{104} = \dfrac{13}{15}$ である。

(3) k を 2 以上の自然数とする。数列 $\{a_n\}$ の第 M_k 項から第 N_k 項までの和を考えると、

$$\frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \cdots + \frac{k-1}{k}$$
$$= \frac{1}{k}(1 + 2 + \cdots + (k-1))$$
$$= \frac{1}{k} \times \frac{1}{2}(k-1)(k-1+1)$$
$$= \frac{1}{2k}(k-1)k = \frac{1}{2}(k-1)$$
$$= \frac{1}{2}k - \frac{1}{2} \text{ である。}$$

したがって、数列 $\{a_n\}$ の初項から第 N_k 項までの和は、

$$\sum_{i=1}^{k}(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}k(k+1) - \frac{1}{2}k$$
$$= \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{4}k - \frac{1}{2}k$$
$$= \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{4}k$$

である。よって、

$$\sum_{n=1}^{103} a_n = \frac{1}{2} + \cdots + \frac{12}{15}$$
$$= \frac{1}{2} + \cdots + \frac{12}{15} + \frac{13}{15} + \frac{14}{15} - \frac{13}{15} - \frac{14}{15}$$
$$= \frac{1}{4} \times 15^2 - \frac{1}{4} \times 15 - \frac{27}{15}$$
$$\frac{225}{4} - \frac{15}{4} - \frac{9}{5}$$
$$= \frac{210}{4} - \frac{9}{5}$$
$$= \frac{105}{2} - \frac{9}{5}$$
$$= \frac{525}{10} - \frac{18}{10}$$
$$= \frac{507}{10} \text{ である。}$$

第 4 問

四面体 $OABC$ において、$|\overrightarrow{OA}| = 3$、$|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 2$、$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 60^\circ$ であるとする。また、辺 OA 上に点 P をとり、辺 BC 上に点 Q をとる。以下 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ とおく。

(1) $0 \leqq s \leqq 1$、$0 \leqq t \leqq 1$ であるような実数 s, t を用いて $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c}$ と表す。

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 3 \times 2 \times \cos 60^\circ = 3$$
$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = 3 \times 2 \times \cos 60^\circ = 3$$
$$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 2 \times 2 \times \cos 60^\circ = 2$$

であることから、

$$\overrightarrow{PQ} = (1-t)\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c} - s\overrightarrow{a}$$

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = (1-t)^2|\overrightarrow{b}|^2 + t^2|\overrightarrow{c}|^2 + s^2|\overrightarrow{a}|^2 + 2(1-t)t\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} - 2st\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} - 2s(1-t)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$$
$$= (1-t)^2\times 4 + t^2\times 4 + s^2\times 9 + 2(1-t)t\times 2 - 2st\times 3 - 2s(1-t)\times 3$$
$$= 4(1-t)^2 + 4t^2 + 9s^2 + 4(1-t)t - 6s - 6s(1-t)$$
$$= 4 - 8t + 4t^2 + 4t^2 + 9s^2 + 4t - 4t^2 - 6s + 6st - 6st$$
$$= 4t^2 - 4t + 9s^2 - 6s + 4$$
$$= (4t^2 - 4t + 1) + (9s^2 - 6s + 1) + 2$$
$$= (2s-1)^2 + (3s-1)^2 + 2$$

ここで、$|\overrightarrow{PQ}|$ が最小となるのは、$2t-1=0$ かつ $3s-1=0$ の時であるから、

$$s = \frac{1}{3}, t = \frac{1}{2}$$

このとき、

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = 2$$

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2}$ となる。

(2) 三角形 ABC の重心を G とする。$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2}$ のとき、三角形 GPQ の面積を求めよう。

まず、$s = \frac{1}{3}, t = \frac{1}{2}$ を代入すると、

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{c} - \frac{1}{3}\overrightarrow{a}$$

であるから、

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} - \frac{1}{3}|\overrightarrow{a}|^2$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{9}{3}$$
$$= 3 - 3 = 0$$

であるから、$\angle APQ = 90^\circ$ である。

ここで、$s = \frac{1}{3}$ より $AP = 2$ であることを用いると、三角形 APQ の面積は、

$AP \times PQ \times \frac{1}{2} = 2 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \sqrt{2}$ となる。

また、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{c}$$
$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{c}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OQ}$$

となる。

よって、点 G は AQ を $2:1$ に内分する点である。

以上のことから、三角形 GPQ の面積を求めると、

(三角形 GPQ) $= \frac{1}{3}$(三角形 APQ) $= \frac{\sqrt{2}}{3}$ である。