2017年センター数学IA解答解説Version1

2016年1月15日作成

第1問

[1] x は正の実数で $x^2+\dfrac{4}{x^2}=9$ を満たすとする。

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{2}{x}\right)^2 &= x^2+2\times x\times\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\\ &= x^2+4+\frac{4}{x^2}\\ &= \left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)+4\\ &= 9+4\\ &= 13\end{aligned}$$

ここで x は正の実数なので、$\dfrac{2}{x}$ も正の実数であり、$x+\dfrac{2}{x}$ も正の実数である。
よって、

$$x+\frac{2}{x}=\sqrt{13}$$

さらに、

$$\begin{aligned}x^3+\frac{8}{x^3} &= \left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2-x\times\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\\ &= \left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2+\frac{4}{x^2}-2\right)\\ &= \sqrt{13}\times(9-2)\\ &= 7\sqrt{13}\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}x^4+\frac{16}{x^4} &= \left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)^2-2\times x^2\times\frac{4}{x^2}\\ &= \left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)^2-8\\ &= 9^2-8\\ &= 81-8\\ &= 73\end{aligned}$$

[2] 実数 x に関する 2 つの条件 p,q を

$p: x=1$

$q: x^2=1$

とする。また、条件 p,q の否定をそれぞれ $\overline{p},\overline{q}$ で表す。

(1) q は $x=1,-1$ であるが p は $x=1$ であるので、
$q\Rightarrow p$ について、反例が $x=-1$ である。

$q \Leftarrow p$ について、成り立つ。
ゆえに、必要条件だが十分条件でない。

$\overline{p}$ は $x \neq 1$ であるが、q は $x = 1$ であるので、
$\overline{p} \Rightarrow q$ について、反例が $x = 0$ である。
$\overline{p} \Leftarrow q$ について、反例が $x = 1$ である。
ゆえに、必要条件でも十分条件でもない。

(p または $\overline{q}$) は $x \neq -1$ であるが、q は $x = 1, -1$ であるので、
(p または $\overline{q}$) $\Rightarrow q$ について、反例が $x = 0$ である。
(p または $\overline{q}$) $\Leftarrow q$ について、反例が $x = -1$ である。
ゆえに、必要条件でも十分条件でもない。

($\overline{p}$ かつ q) は $x = -1$ であるが、q は $x = 1, -1$ であるので、
($\overline{p}$ かつ q) $\Rightarrow q$ について、成り立つ。
($\overline{p}$ かつ q) $\Leftarrow q$ について、反例が $x = 1$ である。
ゆえに、十分条件だが必要条件でない。

(2) 実数 x に関する条件 r を
$r : x > 0$
とする。3 つの命題
A :「(p かつ q)$\Rightarrow r$」
B :「$q \Rightarrow r$」
C :「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」
の真偽について考える。

(p かつ q) は $x = 1$ であるが、r は $x > 0$ であるので、(p かつ q) $\Rightarrow r$」は成り立つ。

q は $x = 1, -1$ であるが、r は $x > 0$ であるので、反例が $x = -1$ となり成り立たない。

$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ の対偶を考えると、$p \Rightarrow q$ であって、
p は $x = 1$ であるが、q は $x = 1, -1$ であるので成り立つ。

[3] a を定数とし、

$$g(x) = x^2 - 2(3a^2 + 5a)x + 18a^4 + 30a^3 + 49a^2 + 16$$

とおく。2 次関数 $y = g(x)$ のグラフの頂点について、

$$\begin{aligned} y &= x - 2(3a^2 + 5a)x + (3a^2 + 5a)^2 - (3a^2 + 5a)^2 + (18a^4 + 30a^3 + 49a^2 + 16) \\ &= \{x - (3a^2 + 5a)\}^2 + \{-(9a^4 + 30a^3 + 25a^2) + (18a^4 + 30a^3 + 49a^2 + 16)\} \\ &= \{x - (3a^2 + 5a)\}^2 + (9a^4 + 24a^2 + 16) \end{aligned}$$

なので、頂点は

$$(3a^2 + 5a, 9a^4 + 24a^2 + 16)$$

である。

ここで、a が実数全体を動く時、頂点の x 座標の最小値について、$X = 3a^2 + 5a$ と置くと、

$$\begin{aligned} X &= 3(a^2 - \frac{5}{3}a) \\ &= 3(a - \frac{5}{6})^2 - 3 \times \frac{25}{36} \\ &= 3(a - \frac{5}{6})^2 - \frac{25}{12} \end{aligned}$$

なので、最小値は

$$-\frac{25}{12}$$

次に、$t = a^2$ と置くと、頂点の y 座標を $Y = 9a^4 + 24a^2 + 16$ としたとき、
$Y = 9t^2 + 24t + 16 = (3t + 4)^2$

よって、

$$t = -\frac{3}{4}$$

のとき最小値を迎える。
しかし、$t = a^2$ より $t \geq 0$ であるので、$t = 0$ の時、最小値 16 となる。

第 2 問

[1] $\triangle ABC$ において、$AB = \sqrt{3} - 1, BC = \sqrt{3} + 1, \angle ABC = 60^\circ$ とする。

(1) AC の長さを求める。余弦定理より、

$$AC^2 = (\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 - 2(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)\cos 60^\circ$$
$$AC^2 = (3 - 2\sqrt{3} + 1) + (3 + 2\sqrt{3} + 1) - 2 \times (3 - 1) \times \frac{1}{2}$$
$$AC^2 = 6$$
$$AC = \sqrt{6}$$

よって、外接円の半径を R とすると、正弦定理より、

$$2R = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$$
$$2R = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$2R = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$
$$2R = 2\sqrt{2}$$

よって、外接円の半径は $\sqrt{2}$ である。すると、正弦定理より、

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{\sin \angle BAC} = 2\sqrt{2}$$
$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{\sin \angle BAC} = 4$$
$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4} = \sin \angle BAC$$
$$\therefore \sin \angle BAC = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4}$$

(2) 辺 AC 上に点 D を、$\triangle ABD$ の面積が $\frac{\sqrt{2}}{6}$ になるようにとるとき、

$$\frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{2}}{6}$$
$$AB \cdot AD \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$
$$AB \cdot AD \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{1})}{4} = \frac{1}{3}$$
$$AB \cdot AD = \frac{4}{3(\sqrt{3} + \sqrt{1})}$$
$$AB \cdot AD = \frac{4(\sqrt{3} - 1)}{3(3 - 1)}$$
$$AB \cdot AD = \frac{4(\sqrt{3} - 1)}{3 \times 2}$$

$$AB \cdot AD = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3}$$
$$AB \cdot AD = \frac{2\sqrt{3}-2}{3}$$
であるから、
$$(\sqrt{3}-1)AD = \frac{2\sqrt{3}-2}{3}$$
$$(\sqrt{3}-1)AD = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3}$$
$$\therefore AD = \frac{2}{3}$$

[2] スキージャンプは、飛距離および空中姿勢の美しさを競う競技である。選手は斜面を滑り降り、斜面の端から空中に飛び出す。飛距離 D から得点 X が決まり、空中姿勢から得点 Y が決まる。ある大会における 58 回のジャンプについて考える。

(1) 得点 X、得点 Y および飛び出すときの速度 V について 3 つの散布図を得た。
　0 の X と V の相関について、X と Y の相関のほうが密になって相関が強いので誤り。
　1 の X と Y の間に正の相関があるのは、散布図が右上に概ね沿っていることから正しい。
　2 の V が最大の時、X は最大ではないので誤り。
　3 の V が最大の時、Y は最大ではないので誤り。
　4 の Y が最小の時、X は最小ではないので正しい。
　5 の X が 80 以上の時、$V < 93$ があるので誤り。
　6 の Y が 55 以上で Y が 94 以上の欄は空白なので正しい。

(2) 得点 X は、飛距離 D から次の計算式によって算出される。
　$X = 1.80 \times (D - 125.0) + 60.0$ 分散は変数の係数の 2 乗に比例する。
なぜなら、差の 2 乗の平均が分散であるが、係数によって差が比例するので、分散は 2 乗に比例する。よって、X の分散は、D の分散の $1.8^2 = 3.24$ 倍になる。
　X と Y の共分散は (X) の差$)(Y$ の差$)$ の平均
　D と Y の共分散は (X) の差$)(Y$ の差$)$ の平均
であるので、倍率は、1.80 倍である。

$$X \text{ と } Y \text{ の相関係数は } \frac{(X\text{ の差})(Y\text{ の差})\text{ の平均}}{\sqrt{(X\text{ の差})^2\text{の平均}}\sqrt{(Y\text{ の差})^2\text{の平均}}}$$

$$D \text{ と } Y \text{ の相関係数は } \frac{(D\text{ の差})(Y\text{ の差})\text{ の平均}}{\sqrt{(D\text{ の差})^2\text{の平均}}\sqrt{(Y\text{ の差})^2\text{の平均}}}$$
であるので、倍率は、

$$\frac{1.80}{1.80} = 1 \text{ 倍}$$

(3) 58 回のジャンプは 29 名の選手が 2 回ずつ行ったものである。
1 回目の $X + Y$ の値に対するヒストグラムと 2 回目の $X + Y$ の値に対するヒストグラムについて考える。
また、1 回目の $X + Y$ の値に対する箱ひげ図と 2 回目の $X + Y$ の値に対する箱ひげ図について考える。
ただし、1 回目の $X + Y$ の最小値は 108.0 であった。

これらの情報からわかることを整理する。
　まず、1 回目の $X + Y$ の最小値が 108.0 であることから、A が 1 回目、B が 2 回目となる。
　また、a が 1 回目で、b が 2 回目の箱ひげ図である。

次に図の読み取りについて考えていく。
　0 の 1 回目の四分位範囲は 15 未満であるが、2 回目の四分位範囲は 15 を超えているので誤り。
　1 の 1 回目の中央値は 123 ぐらいであるが、2 回目の中央値は 114 ぐらいなので正しい。
　2 の 1 回目の最大値は 143 ぐらいであるが、2 回目の最大値は 142 ぐらいなので誤り。
　3 の 1 回目の最小値は 107 ぐらいであるが、2 回目の最小値は 104 ぐらいなので誤り。

第 3 問

あたりが 2 本、はずれが 2 本の合計 4 本からなるくじがある。A, B, C の 3 人がこの順に 1 本ずつくじを引く。ただし、1 度引いたくじは戻さない。

(1) A, B の少なくとも一方があたりのくじを引く事象 E_1 の確率を考えると、この余事象は A も B もはずれを引く確率なので、

$$1 - E_1 = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3}$$

$$1 - E_1 = \frac{1}{6}$$

$$E_1 = \frac{5}{6}$$

(2) A, B, C の 3 人で 2 本のあたりくじを引く事象 E を考える。
AB か BC か CA があたりとなる組み合わせになれば良いので、
　(A だけがはずれくじを引く事象) と (B だけがはずれくじを引く事象) と (C だけがはずれくじを引く事象)
の和事象となる。
それぞれのパターンは同じなので、3 つのうち 1 つだけ考えてみる。
A だけがはずれを引く確率は、

$$\frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

よって、その 3 倍をして $\frac{1}{2}$ である。

(3) 事象 E_1 が起こったときの事象 E の起こる条件付き確率について、

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{5}$$

(4) B, C の少なくとも一方があたりのくじを引く事象 E_2 について考える。
　{BC があたる, AB があたる, B のみがあたる, AC があたる, C のみがあたる }
　= { (BC があたる), (C がはずれる), (B がはずれる) }
　= { (A のみがはずれる), (C がはずれる), (B がはずれる) }
の和事象である。余事象を考えると、BC ともにはずれるのは

$$\frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

なので、和事象の確率は $\frac{5}{6}$ である。

他方で、A, C の少なくとも一方があたりくじを引く事象 E_3 も同様に余事象を考えることで、$\frac{5}{6}$ である。

これらのことから、$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{5}{6}$ となる。

第 4 問

(1) 37a が 4 で割り切れるためには、7a が 4 で割り切れれば良いので、372 または 376。
よって、$a = 2, 6$ のときである。

(2) 7b5c が 4 で割り切れるためには 5c が 4 で割り切れなければならないので、
　$b = 0, 1, \ldots 9$ かつ、$c = 2, 6$
他方で、7b5c が 9 で割り切れるためには、$7 + b + 5 + c$ が 9 の倍数でなければならないので、
　$b + c + 3$ は 9 の倍数。

もし、$c = 2$ ならば、$b = 4$。

もし、$c = 6$ ならば、$b = 0, 9$

よって、全部で 3 個。

これらのうち、7b5c が最小になるのは、$b = 0, c = 6$ のときである。
一方で、7b5c が最大となるのは、$b = 9, c = 6$ のときである。

また、7b5c$=(6\times n)^2$ となる b,c と自然数 n について考えると、
7b5c$=9\times 4\times n^2$ であるから、7b5c が 9 の倍数かつ 4 の倍数である。
上で求めた 3 つの数字を並べ、9×4 で割ってみると、

7056, 7452, 7956
784, 828, 884
196, 207, 221

よって、$14^2=196$ となる 7056 が該当し、$b=0,c=6,n=14$ である。

(3) 1188 の正の約数について考える。

$$1188=2^2\times 3^3\times 11$$

ここで、次のような表を考える。左側は 11 を 0 回掛けた約数、右側は 11 を 1 回掛けた約数である。

	1	3	9	27
1	x	x	x	x
2	o	o	o	o
4	v	v	v	v

	1	3	9	27
1	x	x	x	x
2	o	o	o	o
4	v	v	v	v

この表から、約数になるものの個数は

$3\times 4\times 2=24$ 個。

これらのうち、2 の倍数の約数になるものの個数は (o と v に該当するもの)、
$4\times 2\times 2=16$ 個。
さらに、4 の倍数の約数になるものの個数は (v に該当するもの)、
$4\times 1\times 2=8$ 個。
次に、1188 のすべての正の約数の積を 2 進法で表したものを考える。
末尾の 0 が連続する個数は、2 を掛けた個数と同じ。
上の表において、o の部分は 0 が 1 個、v の部分が 0 が 2 個増えることと同じなので、

$8\times 1+8\times 2=24$ 個。

第 5 問

$\triangle ABC$ において、$AB=3, BC=8, AC=7$ とする。
(1) 辺 AC 上に点 D を $AD=3$ となるようにとり、$\triangle ABD$ の外接円と直線 BC の交点で B と異なるものを E とする。方べきの定理より

$$BC\cdot CE=AC\cdot CD=7\cdot 4=28$$

$BC=8$ より、$CE=\dfrac{28}{8}=\dfrac{7}{2}$

直線 AB と直線 DE の交点を F とする。
メネラウスの定理より、

$$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CD}{DA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

$$\frac{9}{7}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

$$\frac{12}{7}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

$$\frac{AF}{FB}=\frac{7}{12}$$

$$\frac{BF}{AF}=\frac{12}{7}$$

$AF=t$ とおくと、$BF=3+t$ となるので、

$$\frac{3+t}{t}=\frac{12}{7}$$

$$7(3+t)=12t$$

$$7t+21=12t$$

$$21=5t$$

$$t=\frac{21}{5}$$

よって、$AF=\dfrac{21}{5}$ である。