2018年センター数学IA解答解説Version1

@aporia_life

2018年1月14日作成

第1問

[1] x を実数とし、

$$A = x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)$$

とおく。整数 n に対して、

$$\begin{aligned}
&(x+n)(n+5-x)\\
&= (x+n)\{n+(5-x)\}\\
&= xn + x(5-x) + n^2 + n(5-x)\\
&= xn + x(5-x) + n^2 + 5n - xn\\
&= x(5-x) + n^2 + 5n \cdots \text{(答) ⑤}
\end{aligned}$$

である。したがって、$X = x(5-x)$ とおくと、

$$\begin{aligned}
&A = x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)\\
&= x(5-x) \times (x+1)(6-x) \times (x+2)(7-x)\\
&= \{(x+0)(0+5-x)\} \times \{(x+1)(1+5-x)\} \times \{(x+2)(2+5-x)\}\\
&= \{x(5-x)\} \times \{x(5-x) + 1^2 + 5\cdot 1\} \times \{x(5-x) + 2^2 + 5\cdot 2\}\\
&= X \times (X+1+5) \times (X+4+10)\\
&= X(X+6)(X+14) \cdots \text{(答) ⑥、①、④}
\end{aligned}$$

と表せる。ここで、$x = \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ のとき、

$$5 - x = \frac{10}{2} - \frac{5+\sqrt{17}}{2} = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$$

であるから、

$$X = x(5-x) = \frac{5+\sqrt{17}}{2}\cdot\frac{5-\sqrt{17}}{2} = \frac{(5+\sqrt{17})(5-\sqrt{17})}{2\cdot 2} = \frac{25-17}{4} = \frac{8}{4} = 2 \cdots \text{(答) ②}$$

よって、

$$A = X(X+6)(X+14) = 2(2+6)(2+14) = 2\cdot 8\cdot 16 = 2^1\cdot 2^3\cdot 2^4 = 2^8 \cdots \text{(答) ⑧}$$

[2] (1) 全体集合 U を $U = \{x|x$ は20以下の自然数$\}$ とすると、$U = \{1, 2, 3, \cdots, 20\}$

この部分集合 A, B, C を考える。

$A = \{x|x \in U$ かつ x は20の約数$\} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

$B = \{x|x \in U$ かつ x は3の倍数$\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

$C = \{x|x \in U$ かつ x は偶数$\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

集合 A の補集合を $\overline{A}$ と表し、空集合を ϕ と表す。

(a) $A \subset C$ について、例えば、$1 \in A$ ですが $1 \notin C$ となっているので $A \subset C$ は誤りです。

(b) $A \cap B = \phi$ について、正しいです。

よって、答えは ② となります。

(c) $(A \cup C) \cap B = \{6, 12, 18\}$ について、

$B \cap C = \{6, 12, 18\}$ であるから、

$$(A \cup C) \cap B = (A \cap B) \cup (C \cap B) = \phi \cup (B \cap C) = B \cap C = \{6, 12, 18\}$$

なので、正しいです。

(d) $(\overline{A} \cap C) \cup B = \overline{A} \cap (B \cup C)$ について、

$A \cap B = \phi$ であることを用いて Venn 図を作図すると正しいことがわかります。

よって、答えは ⓪ となります。

(2) 実数 x に関する次の条件 p, q, r, s を考える。

$$p : |x-2| > 2$$

これを解くと、

$$x-2 < -2 \text{ または } 2 < x-2$$

$$x < 0 \text{ または } 4 < x$$

$$q : x < 0$$

$$r : x > 4 \text{ すなわち、} 4 < x$$

$$s : \sqrt{x^2} > 4$$

これを解くと、

$$x^2 > 16$$

$$x < -4 \text{ または } 4 < x$$

さて、$q \cup r$ は $x < 0$ または $4 < x$ であるから、$q \cup r$ は p であるための必要十分条件となります。
よって、答えは 2 となります。

まず、$s \Rightarrow r$ は偽です。(反例は $x = -5$ などです)
一方、$s \Leftarrow r$ は真です。
よって、s は r であるための必要条件となります。
ゆえに、答えは 0 となります。

[3] a を正の実数とし、

$$f(x) = ax^2 - 2(a+3)x - 3a + 21$$

とする。2 次関数 $y = f(x)$ のグラフの頂点の x 座標を p と置くとき、

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 - 2(a+3)x - 3a + 21 \\
&= a\left\{x^2 - 2\frac{a+3}{a}x\right\} - 3a + 21 \\
&= a\left\{x^2 - 2\frac{a+3}{a}x + \left(\frac{a+3}{a}\right)^2 - \left(\frac{a+3}{a}\right)^2\right\} - 3a + 21 \\
&= a\left\{x^2 - 2\frac{a+3}{a}x + \left(\frac{a+3}{a}\right)^2\right\} - a \cdot \left(\frac{a+3}{a}\right)^2 - 3a + 21 \\
&= a\left\{x^2 - 2\frac{a+3}{a}x + \left(\frac{a+3}{a}\right)^2\right\} - a \cdot \frac{(a+3)^2}{a^2} - 3a + 21 \\
&= a\left(x - \frac{a+3}{a}\right)^2 - \frac{(a+3)^2}{a} - 3a + 21
\end{aligned}$$

よって、

$$p = \frac{a+3}{a} = 1 + \frac{3}{a} \cdots \text{(答) 1、3}$$

$0 \leqq x \leqq 4$ における関数 $f(x)$ の最小値が $f(4)$ となるような a の範囲について、
a は正の実数なので下に凸なグラフである。
すると、$4 \leqq$ (頂点の x 座標) となるから、

$$4 \leqq 1 + \frac{3}{a}$$

$$3 \leqq \frac{3}{a}$$

$$a \leqq 1$$

よって、対応する範囲の答えは $0 < a \leqq 1 \cdots$ (答) 1

また、$0 \leqq x \leqq 4$ における $y=f(x)$ の最小値が $f(p)$ となるような a の範囲について、

$$0 \leqq p \leqq 4$$
$$0 \leqq 1+\frac{3}{a} \leqq 4$$
$$-1 \leqq \frac{3}{a} \leqq 3$$

$0 \leqq a$ より、各辺を a 倍すると、

$$-a \leqq 3 \leqq 3a$$
$$-a \leqq 3 \text{ かつ } 3 \leqq 3a$$
$$-3 \leqq a \text{ かつ } 1 \leqq a$$

よって、対応する範囲の答えは $1 \leqq a \cdots$ (答) ①

したがって、$0 \leqq x \leqq 4$ における関数 $y=f(x)$ の最小値が 1 であるものを考えると、

(イ) $0 < a \leqq 1$ の場合、最小値は $f(4)$ であったから、

$$f(4)=1$$

$x=4$ を代入すると、$f(4)=16a-8(a+3)-3a+21$ であるから、

$$16a-8(a+3)-3a+21=1$$
$$16a-8a-24-3a+21=1$$
$$5a=4$$
$$a=\frac{4}{5} \cdots \text{(答) ④、⑤}$$

(ロ) 一方、$1 \leqq a$ の場合、最小値は $f(p)$ であったから、

$$f(p)=1$$

$x=p$ は頂点であり、上の式より $f(p)=-\dfrac{(a+3)^2}{a}-3a+21$ であるから、

$$-\frac{(a+3)^2}{a}-3a+21=1$$

$0 \leqq a$ より、各辺を a 倍すると、

$$-(a+3)^2-3a^2+21a=a$$
$$-a^2-6a-9-3a^2+21a=a$$
$$4a^2-14a+9=0$$
$$a=\frac{7\pm\sqrt{49-36}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{4}$$

$1 \leqq a$ より、

$$a=\frac{7+\sqrt{13}}{4} \cdots \text{(答) ⑦、①、③、④}$$

第 2 問

[1] 四角形 $ABCD$ において、3 辺の長さをそれぞれ $AB=5$、$BC=9$、$CD=3$、対角線 AC の長さを $AC=6$ とする。

このとき、$\cos\angle ABC$ について、余弦定理より、

$$\cos\angle ABC=\frac{5^2+9^2-6^2}{2\cdot5\cdot9}=\frac{25+81-36}{2\cdot5\cdot9}=\frac{70}{2\cdot5\cdot9}=\frac{7}{9} \cdots \text{(答) ⑦、⑨}$$

すると、三角比の相互関係より、

$$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{49}{81}}=\sqrt{\frac{32}{81}}=\frac{4\sqrt{2}}{9} \cdots \text{(答) ④、②、⑨}$$

ここで、四角形 $ABCD$ は台形であるとする。

※「台形」とは、対応する 1 組の辺が平行である四角形であるものをいいます。

$$AB \cdot \sin\angle ABC = 5 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{20\sqrt{2}}{9} = \frac{28.28\cdots}{9} = 3.1\cdots > 3 = CD \cdots \text{(答) ⓪}$$

すなわち、仮に $AD \mathbin{/\!/} BC$ である場合、$AB \cdot \sin\angle ABC$ は台形の高さを表しますが、辺 CD がその高さより短いので四角形が成立しません。
ゆえに、$AD \not\parallel BC$ であるため、$AB \mathbin{/\!/} CD$ となります。
よって、答えは ④ となります。

ここで、BD を求めるためにいくつか補助線を入れます。
直線 AB を延長し、点 C を通る BD に平行な直線を引き、交点を E とします。
すると、四角形 $DBEC$ は平行四辺形になるので、$BD = EC$ となります。
また、$BE = DC = 3$ なので、$AE = 8$ となります。
さて、$\triangle AEC$ を用いて CE を求めるためには $\cos\angle BAC$ が必要なので、
$\triangle ABC$ に対し余弦定理より、

$$\cos\angle BAC = \frac{5^2+6^2-9^2}{2\cdot5\cdot6} = \frac{25+36-81}{2\cdot5\cdot6} = \frac{-20}{2\cdot5\cdot6} = -\frac{1}{3}$$

よって、$\triangle AEC$ に対して余弦定理より、

$$EC^2 = 8^2+6^2-2\cdot8\cdot6\cdot\cos\angle BAC$$
$$EC^2 = 8^2+6^2-2\cdot8\cdot6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$EC^2 = 64+36+2\cdot8\cdot2$$
$$EC^2 = 4\cdot16+4\cdot9+2\cdot8\cdot2$$
$$EC^2 = 4\cdot33$$
$$EC = 2\sqrt{33}$$

ゆえに、$BD = EC = 2\sqrt{33}\cdots$ (答) ②、③、③

[2] ある陸上競技大会に出場した選手の身長 (単位は cm) と体重 (単位は kg) のデータが得られた。男子短距離、男子長距離、女子短距離、女子長距離の四つのグループに分けると、それぞれのグループの選手数は、男子短距離が 328 人、男子長距離が 271 人、女子短距離が 319 人、女子長距離が 263 人である。

(1) 次のページの図 1 および図 2 は、男子短距離、男子長距離、女子短距離、女子長距離の四つのグループにおける、身長のヒストグラム及び箱ひげ図である。
図 1 および図 2 から読み取れる内容について、
⓪ について、四つのグループのうち範囲が最も大きいのは、男子短距離グループの範囲の 50 であり、女子短距離グループの範囲は 42 しかありませんので誤りです。
① について、図 2 の箱ひげ図を見るとすべての四分位範囲は 12 未満になっているので正しいです。
② について、男子長距離グループのヒストグラムでは、中央値は 175〜180 にあり、度数最大の階級 170〜175 に中央値が入っていないので誤りです。
③ について、女子長距離グループのヒストグラムでは、第 1 四分位数は 160〜165 に入っているので、度数最大の階級 165〜170 に第 1 四分位数が入ってないので誤りです。
④ について、すべての選手の中で最も身長の高い選手は、男子短距離グループの中におり、男子長距離グループの中にいないので誤りです。
⑤ について、すべての選手の中で最も身長の低い選手は、女子短距離グループの中におり、女子長距離グループの中にいないので誤りです。
⑥ について、男子短距離グループの中央値も男子長距離グループの第 3 四分位数も 181 であり、ともに 180 以上 182 未満であるので正しいです。
よって、正しい答えは ① と ⑥ です。

(2) 身長を H、体重を W とし、X を $X=\left(\dfrac{H}{100}\right)^2$ で、Z を $Z=\dfrac{W}{X}$ で定義する。次のページの図 3 は、男子短距離、男子長距離、女子短距離、女子長距離の四つのグループにおける X と W のデータの散布図である。ただし、原点を通り、傾きが 15、20、25、30 である四つの直線 l_1、l_2、l_3、l_4 も補助線に描いている。また、次ページの図 4 の (a)、(b)、(c)、(d) で示す Z の四つの箱ひげ図は、男子短距離、男子長距離、女子短距離、女子長距離の四つのグループのいずれかの箱ひげ図に対応している。

図 3 および図 4 から読み取れる内容について、

⓪ について、四つのグループのすべてにおいて、X と W には正の相関があり、負の相関ではないので誤りです。

① について、四つのグループのうちで Z の中央値が一番大きいものを考えます。

ここで、Z は BMI 値を表しており、X が小さいほど Z は大きくなります。

図 4 のうち中央値が一番大きいものは (a) であるが、(a) の箱ひげ図において最大値は約 30 です。

一方、男子短距離の散布図において、傾き 30 の直線上に点があるので、(a) は男子短距離の箱ひげ図です。

よって、四つのグループのうちで Z の中央値が一番大きいものは男子短距離グループであり、男子長距離グループでないので誤りです。

② について、四つのグループのうちで Z の範囲が最小なものを考えます。

図 4 のうち範囲が最小なものは (d) であるが、図 3 のうち傾きの範囲が最小なものは女子長距離グループです。

よって、(d) は女子長距離グループの箱ひげ図です。

ゆえに、四つのグループのうちで Z の範囲が最小なものは女子長距離グループであり、男子長距離グループでないので誤りです。

③ について、四つのグループのうちで Z の四分位範囲が最小なものを考えます。

男子短距離グループの箱ひげ図は (a) であるが、四分位範囲は最小ではないので誤りです。

④ について、女子長距離グループのすべての Z の値について考えます。

女子長距離グループの箱ひげ図は (d) であり、この Z の値はすべて 25 より小さいので正しいです。

⑤ について、男子長距離グループの Z の箱ひげ図について考えます。

図 3 において、男子長距離グループのほうが女子短距離グループより傾き 30 の直線に近い点があるので、図 4 の箱ひげ図も 30 に近い値をとる (c) が対応します。よって、正しいです。

ゆえに、正しい答えは ④ と ⑤ です。

(3) n を自然数とする。実測値のデータ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ および $w_1, w_2, \cdots, w_n$ に対して、それぞれの平均値を

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}、\overline{w}=\frac{w_1+w_2+\cdots+w_n}{n}$$

とおく。等式 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)\overline{w}=n\overline{xw}$ などに注意すると、偏差の積の和は

$$\begin{aligned}
&(x_1-\overline{x})(w_1-\overline{w})+(x_2-\overline{x})(w_2-\overline{w})+\cdots+(x_n-\overline{x})(w_n-\overline{w})\\
&=(x_1w_1-x_1\overline{w}-\overline{x}w_1+\overline{xw})+\cdots+(x_nw_n-x_n\overline{w}-\overline{x}w_n+\overline{xw})\\
&=(x_1w_1+\cdots+x_nw_n)-(x_1+\cdots+x_n)\overline{w}-\overline{x}(w_1+\cdots+w_n)+n\overline{xw}\\
&=(x_1w_1+\cdots+x_nw_n)-n\overline{xw}-n\overline{xw}+n\overline{xw}\\
&=(x_1w_1+\cdots+x_nw_n)-n\overline{xw}
\end{aligned}$$

よって、正解は ② となります。

第 3 問

一般に、事象 A の確率を $P(A)$ で表す。また、事象 A の余事象を $\overline{A}$ と表し、二つの事象 A, B の積事象を $A\cap B$ と表す。大小 2 個のさいころを同時に投げる試行において、

A を「大きいさいころについて、4 の目が出る」という事象

B を「2 個のさいころの出た目の和が 7 である」という事象

C を「2 個のさいころの出た目の和が 9 である」という事象

とする。

(1) 事象 A, B, C の確率について、

$$A=\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\}$$

$B = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$
$C = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$

であるから、

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \qquad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \qquad P(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \cdots$$ (答) ①、⑥、①、⑥、①、⑨

(2) 事象 C が起こったときの事象 A が起こる条件付き確率について、

$A \cap C = \{(4,5)\}$

なので、

$$P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{4}{36}} = \frac{1}{4} \cdots$$ (答) ①、④

一方、事象 A が起こったときの事象 C が起こる条件付き確率について、

$$P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6} \cdots$$ (答) ①、⑥

(3) $A \cap B = \{(4,3)\}$ より

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

一方、

$$P(A)P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

よって、$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ となるので、答えは ① となります。なお、A と B は独立であることもわかります。

$$P(A \cap C) = \frac{1}{36}$$

$$P(A)P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{54}$$

よって、$P(A \cap C) > P(A)P(C)$ となるので、答えは ② となります。

(4) 大小 2 個のさいころを同時に投げる試行を 2 回繰り返す。1 回目に事象 $A \cap B$ が起こり、2 回目に事象 $\overline{A} \cap C$ が起こる確率について、

$\overline{A} \cap C = \{(3,6),(5,4),(6,3)\}$

であるから、

$$P(\overline{A} \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

すると、

$$P(A \cap B) \cdot P(\overline{A} \cap C) = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{432} \cdots$$ (答) ①、④、③、②

三つの事象 A, B, C がいずれもちょうど 1 回ずつ起こる確率について考える。すると、$B \cap C = \phi$ より、

(イ) $(A \cap B)$ と $(\overline{A} \cap C)$ の場合
(ロ) $(A \cap C)$ と $(\overline{A} \cap B)$ の場合

のみとなる。

(イ) $(A \cap B)$ と $(\overline{A} \cap C)$ の場合、$P(\overline{A} \cap C) = \frac{3}{36}$ より、

$$P(A \cap B) \cdot P(\overline{A} \cap C) + P(\overline{A} \cap C) \cdot P(A \cap B) = 2 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{3}{36}$$

(ロ) $(A \cap C)$ と $(\overline{A} \cap B)$ の場合、$P(\overline{A} \cap B) = \frac{5}{36}$ より、

$$P(A \cap C) \cdot P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \cdot P(A \cap C) = 2 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{5}{36}$$

(イ)、(ロ) より、求める確率は、

$2 \cdot \frac{3}{36} \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{36} = 2 \cdot \frac{8}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{81} \cdots$ (答) ①、⑧、①

第 4 問

(1) 144 を素因数分解すると、

$144 = 12 \times 12 = 2^2 \cdot 3 \times 2^2 \cdot 3 = 2^4 \times 3^2 \cdots$ (答) ④、③、②

となります。すると、144 の正の約数の個数は

$(4+1) \times (2+1) = 15$ 個 $\cdots$ (答) ①、⑤

となります。

(2) 不定方程式

$144x - 7y = 1$

の整数解 x, y の中で、x の絶対値が最小になるものを考える。ユークリッド互除法より、

$144 = 7 \times 20 + 4$

$7 = 4 \times 2 - 1$

なお、7 と 4 は互いに素であるから、144 と 7 も互いに素である。よって、

$1 = 4 \times 2 - 7$

$1 = (144 - 7 \times 20) \times 2 - 7$

$1 = 144 \times 2 - 7 \times 40 - 7$

$1 = 144 \times 2 - 7 \times 41$

$\therefore x = 2$、$y = 41 \cdots$ (答) ②、④、①

$144x - 7y = 1 \cdots$ ①

$144 \times 2 - 7 \times 41 = 1 \cdots$ ②

① − ② より、

$144(x-2) - 7(y-41) = 0$

$144(x-2) = 7(y-41) \cdots$ ③

144 と 7 は互いに素であるから、ある整数 k があって、

$x - 2 = 7k \cdots$ ④

とおける。このとき、

$x = 7k + 2$

となる。④ を上の ③ に代入すると、

$144 \cdot 7k = 7(y-41)$

$144k = y - 41$

$y = 144k + 41$

ゆえに、すべての整数解は、k を整数として、

$x = 7k + 2$、$y = 144k + 41 \cdots$ (答) ⑦、①、④、④

(3) 144 の倍数で、7 で割ったら余りが 1 となる自然数のうち、正の約数の個数が 18 個である最小のものを考える。

因数が 2 または 3 以外のものをかけたとき、正の約数の個数は

$(4+1) \times (2+1) \times (1+1) = 30$ 個

となってしまうので、2 または 3 を 1 回掛けたものを考える。

前問より、$k = 0$ のとき、$x = 2$、$y = 41$ で、

$144 \times 2 - 7 \times 41 = 1$

よって、144×2 です。$\cdots$ (答) ②

一方、正の約数の個数が 30 個である最小のものを考える。

前問より、$k = 1$ のとき、$x = 9$ で、$144 \times 9 = 2^4 \times 3^4$ の約数の個数は 25 個

$k = 2$ のとき、$x = 16$ で、$144 \times 16 = 2^8 \times 3^2$ の約数の個数は 27 個

$k=3$ のとき、$x=23$ で、$144\times 23=2^4\times 3^2\times 23^1$ の約数の個数は 30 個
よって、144×23 です。 $\cdots$ (答) ②、③

第 5 問

$\triangle ABC$ において $AB=2$、$AC=1$、$\angle A=90^\circ$ とする。
$\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とする。

$$BD:CD=2:1$$

である。一方、直角三角形であるから、三平方の定理より、

$$BC=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

$$\therefore BD=\frac{2}{3}\times\sqrt{5}=\frac{2\sqrt{5}}{3}\ \cdots\ (\text{答})\ ②、⑤、③$$

点 A を通り点 D で辺 BC に接する円と辺 AB との交点で A と異なるものを E とする。
方べきの定理より、

$$AB\cdot BE=BD^2=\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2=\frac{20}{9}\ \cdots\ (\text{答})\ ②、⓪、⑨$$

ここで、$AB=2$ であるから、

$$BE=\frac{10}{9}\ \cdots\ (\text{答})\ ①、⓪、⑨$$

このとき、$AE=\dfrac{8}{9}$ となるので、$AE:BE=4:5$ となる。

$$\frac{BE}{BD}=\frac{\frac{10}{9}}{\frac{2\sqrt{5}}{3}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

一方、

$$\frac{AB}{BC}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}<\sqrt{5}$$

よって、

$$\frac{BE}{BD}<\frac{AB}{BC}\ \cdots\ (\text{答})\ ⓪$$

すなわち、

$$\frac{BE}{AB}<\frac{BD}{BC}$$

となり、直線 ED を点 D 側に延長すると、徐々に直線 AC に近づくことがわかる。
このとき、直線 AC と直線 DE の交点は辺 AC の端点 C の側の延長上にある。 $\cdots$ (答) ④

その交点を F とする。メネラウスの定理より、

$$\frac{CF}{AF}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{AE}{BE}=1$$

$$\frac{CF}{AF}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{5}=1$$

$$\frac{CF}{AF}=\frac{5}{8}\ \cdots\ (\text{答})\ ⑤、⑧$$

ここで、$CF=x$ とおくと、$AF=x+1$ となるから、

$$\frac{x}{x+1}=\frac{5}{8}$$

$$8x=5(x+1)$$

$$8x=5x+5$$

$$3x=5$$

$$x=\frac{5}{3}\ \cdots\ (\text{答})\ ⑤、③$$

したがって、BF の長さが求まり、$\dfrac{CF}{AC}=\dfrac{BF}{AB}$ であることがわかる。
ゆえに、BC は $\angle ABF$ の二等分線であるから、点 D は $\triangle ABF$ の内心である。 $\cdots$ (答) ①