2019年センター数学IA解答解説

@aporia_life

2019年1月21日作成

第1問

[1] a を実数とする。因数分解すると、

$9a^2-6a+1=(3a-1)^2 \cdots$ (答)③、①

となる。次に、

$A=\sqrt{9a^2-6a+1}+|a+2|$

とおくと、

$$\begin{aligned} A&=\sqrt{(3a-1)^2}+|a+2| \\ &=|3a-1|+|a+2| \end{aligned}$$

となる。

$a>\frac{1}{3}$ のとき、

$3a-1>0$ かつ $a+2>0$

なので、

$$\begin{aligned} A&=(3a-1)+(a+2) \\ &=4a+1 \cdots \text{(答)④、①} \end{aligned}$$

$-2 \leqq a \leqq \frac{1}{3}$ のとき、

$3a-1 \leqq 0$ かつ $a+2 \geqq 0$

なので、

$$\begin{aligned} A&=-(3a-1)+(a+2) \\ &=-3a+1+a+2 \\ &=-2a+3 \cdots \text{(答)⊖、②、③} \end{aligned}$$

$a<-2$ のとき、

$3a-1<0$ かつ $a+2<0$

なので、

$$\begin{aligned} A&=-(3a-1)-(a+2) \\ &=-3a+1-a-2 \\ &=-4a-1 \end{aligned}$$

$A=2a+13$ となるときを考える。

(イ) $a>\frac{1}{3}$ のとき、

$$\begin{aligned} A=4a+1&=2a+13 \\ 2a&=12 \\ a&=6 \end{aligned}$$

これは $a>\frac{1}{3}$ を満たす。

(ロ) $-2 \leqq a \leqq \frac{1}{3}$ のとき、

$$\begin{aligned} A=-2a+3&=2a+13 \\ -4a&=10 \\ a&=-\frac{5}{2} \end{aligned}$$

これは $-2 \leqq a \leqq \frac{1}{3}$ を満たさない。

(ハ) $a<-2$ のとき、

$$\begin{aligned} A=-4a-1&=2a+13 \\ -6a&=14 \\ a&=\frac{7}{3} \end{aligned}$$

これは $a<-2$ を満たす。

よって、$a=6, \frac{-7}{3}$ である。$\cdots$ (答)⑥、⊖、⑦、③

[2] 二つの自然数 m,n に関する条件 p,q,r について、

$p: m$ と n はともに奇数である

$q: 3mn$ は奇数である

$r: m+5n$ は偶数である

と定める。

(1) 二つの自然数 m,n が条件 $\overline{p}$ を満たすとする。

ド・モルガンの法則より、

$\overline{p}: m$ が偶数、または、n が偶数である

となる。

よって、m が奇数ならば、n は偶数でなければならないので、答えは ⓪ となる。

一方、m が偶数ならば、n は偶数でも奇数でもよいので、答えは ② となる。

(2) まず、$p \Rightarrow q$ について、

$3mn$ が奇数ならば、m も n も奇数でなければならない。

よって、条件 p を満たすならば、m も n も奇数なので、条件 q を満たす。

一方、条件 q を満たすならば、m も n も奇数であるので、条件 p を満たす。

よって、p は q であるための必要十分条件となるので、答えは ⓪ となる。

次に、$p \Rightarrow r$ について、

$m+5n$ が偶数ならば、「m も n もともに偶数である」か、「m も n もともに奇数」でなければならない。

よって、条件 p を満たすならば、m も n も奇数なので、条件 r を満たす。
一方、条件 r を満たすならば、$m=2, n=2$ も条件 r を満たすが、これは条件 p を満たさない反例となる。
よって、p は r であるための十分条件であるが必要条件ではないので、答えは ② となる。

最後に、$\overline{p} \Rightarrow r$ について、
条件 $\overline{p}$ を満たすならば、m が偶数か n が偶数であるから、$m=2, n=1$ も条件 $\overline{p}$ を満たす。しかし、これは条件 r を満たさない反例となる。
一方、条件 r を満たすならば、$m=1, n=1$ も条件 r を満たすが、これは条件 $\overline{p}$ を満たさない反例となる。
よって、条件 $\overline{p}$ は条件 r であるための必要条件でも十分条件でもないので、答えは ③ となる。

[3] a と b はともに正の実数とする。x の 2 次関数
$$y = x^2 + (2a-b)x + a^2 + 1$$
のグラフを G とする。
(1) 平方完成すると、
$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2\cdot x\cdot\left(a-\frac{b}{2}\right) + a^2 + 1 \\ &= x^2 + 2\cdot x\cdot\left(a-\frac{b}{2}\right) + \left(a-\frac{b}{2}\right)^2 \\ &\qquad\qquad - \left(a-\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 + 1 \\ &= \left\{x+\left(a-\frac{b}{2}\right)\right\}^2 - a^2 + ab - \frac{b^2}{4} + a^2 + 1 \\ &= \left\{x+\left(a-\frac{b}{2}\right)\right\}^2 - \frac{b^2}{4} + ab + 1 \\ &= \left\{x-\left(\frac{b}{2}-a\right)\right\}^2 - \frac{b^2}{4} + ab + 1 \end{aligned}$$
よって、グラフ G の頂点の座標は、
$$\left(\frac{b}{2}-a, -\frac{b^2}{4}+ab+1\right)\cdots(答)②、④、①$$
である。

(2) グラフ G が点 $(-1, 6)$ を通るとする。
元の式に代入すると、
$$\begin{aligned} 6 &= (-1)^2 + (2a-b)\cdot(-1) + a^2 + 1 \\ 6 &= 1 - 2a + b + a^2 + 1 \\ b &= -a^2 + 2a + 4 \end{aligned}$$
平方完成すると、
$$\begin{aligned} b &= -(a^2-2a)+4 \\ &= -(a^2-2a+1-1)+4 \\ &= -(a^2-2a+1)+1+4 \\ &= -(a-1)^2+5 \end{aligned}$$
よって、b のとり得る値の最大値は 5 であり、そのときの a の値は 1 である。$\cdots$(答)⑤、①

$b=5, a=1$ のときを考える。
(1) で導いた式に代入すると、頂点の座標は、
$$\left(\frac{5}{2}-1, -\frac{5^2}{4}+5\cdot 1+1\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{4}\right)$$
よって、このときのグラフ G は、2 次関数 $y=x^2$ のグラフを、
x 軸方向に $\frac{3}{2}$、y 軸方向に $\frac{-1}{4}$
だけ平行移動したものである。$\cdots$(答)③、②、㊀、①、④

第 2 問

[1] $\triangle ABC$ において、$AB=3, BC=4, AC=2$ とする。余弦定理より、
$$\begin{aligned} \cos\angle BAC &= \frac{3^2+2^2-4^2}{2\cdot 3\cdot 2} \\ &= \frac{-3}{2\cdot 3\cdot 2} \\ &= \frac{-1}{4}\cdots(答)㊀、①、④ \end{aligned}$$
よって、$\angle BAC$ は**鈍角**である。$\cdots$(答)②
また、三角比の相互関係から、鈍角に注意すると、
$$\begin{aligned} \sin\angle BAC &= \sqrt{1-\left(\frac{-1}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{15}{16}} \\ &= \frac{\sqrt{15}}{4}\cdots(答)①、⑤、④ \end{aligned}$$
である。
線分 AC の垂直二等分線と直線 AB の交点を D とする。
この垂直二等分線と AC との交点を E とする。
$\angle BAC$ は鈍角であるから、半直線 BA の延長上に点 D が存在する。
すると、
$$\begin{aligned} \cos\angle CAD &= \cos(180^\circ - \angle BAC) \\ &= \cos\angle BAC \\ &= \frac{1}{4}\cdots(答)①、④ \end{aligned}$$
である。
また、$\triangle DAE$ は直角三角形なので、
$$\begin{aligned} \cos\angle DAE &= \frac{1}{DA} \\ \frac{1}{4} &= \frac{1}{DA} \\ DA &= 4\cdots(答)④ \end{aligned}$$
である。
よって、$DA : AB = 4 : 3$ である。
ゆえに、$\triangle DAC : \triangle ABC = 4 : 3$ である。
すなわち、$\triangle ABC : \triangle DBC = 3 : 7$ である。
ここで、$\sin\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$ より、$\triangle DBC$ の面積は、
$$\frac{7}{3}\times(\triangle ABC \text{ の面積}) = \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$= \dfrac{7\sqrt{15}}{4} \cdots$ (答)⑦、①、⑤、④

[2] (1) 2013 年の箱ひげ図について、最小値が 70〜75 であるから、それに対応するヒストグラムは ③ である。
2017 年の箱ひげ図について、最小値が 80 なので、それに対応するヒストグラムは ⓪ か ① か ④ に絞られる。
さらに、最大値は 120〜125 であるから、それに対応するヒストグラムは ④ となる。

(2) ⓪ について、箱ひげ図および散布図から、モンシロチョウの初見日の最小値はツバメの初見日の最小値と同じである。
① について、箱ひげ図から、モンシロチョウの初見日の最大値はツバメの初見日の最大値より大きい。
② について、箱ひげ図から、モンシロチョウの初見日の中央値はツバメの初見日の中央値より大きい。
③ について、箱ひげ図から、モンシロチョウの初見日の四分位範囲は 20 ぐらいに対し、ツバメの初見日の四分位範囲は 10 ぐらいと読み取れる。よって、モンシロチョウの初見日の四分位範囲は、ツバメの初見日の四分位範囲の 3 倍より小さい。
④ について、箱ひげ図から、モンシロチョウの初見日の四分位範囲は 20 ぐらいなので、15 日以下であることは偽である。
⑤ について、箱ひげ図から、ツバメの初見日の四分位範囲は 10 ぐらいなので、15 日以下である。
⑥ について、散布図から、原点を通り傾きが 1 である直線上に 4 つ点あるので、モンシロチョウの初見日とツバメの初見日が同じ所が少なくとも 4 地点ある。
⑦ について、散布図から、切片が 15 から切片が −15 までの点線の範囲外に点があるので、同一地点でのモンシロチョウの初見日とツバメの初見日の差が 15 日以下であることは偽である。
以上より、正しくないものは、④ と ⑦ である。

(2) 一般に、n 個の数値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ からなるデータ X の平均値を $\overline{x}$、分散を s^2、標準偏差を s とする。
各 x_i に対して

$$x_i' = \frac{x_i - \overline{x}}{s} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

と変換した $x_1', x_2', \cdots, x_n'$ をデータ X' とする。
ただし、$n \geqq 2, s > 0$ とする。

X の偏差 $x_1 - \overline{x}, \cdots, x_n - \overline{x}$ の平均値は、

$$\frac{1}{n}\{(x_1 - \overline{x}) + \cdots + (x_n - \overline{x})\}$$
$$= \frac{1}{n}\{(x_1 + \cdots + x_n) - (\overline{x} + \cdots + \overline{x})\}$$
$$= \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) - \frac{1}{n} \cdot n\overline{x}$$
$$= \overline{x} - \overline{x}$$
$$= 0 \cdots \text{(答)⓪}$$

である。
X' の平均値は、

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{x_1 - \overline{x}}{s} + \cdots + \frac{x_n - \overline{x}}{s}\right\}$$
$$= \frac{1}{n}\{(x_1 - \overline{x}) + \cdots + (x_n - \overline{x})\} \cdot \frac{1}{s}$$
$$= 0 \cdot \frac{1}{s}$$
$$= 0 \cdots \text{(答)⓪}$$

である。
X' の平均値が 0 であることから、X' の分散と、X'^2 の平均値が一致するので、X' の分散は、

$$\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{x_1 - \overline{x}}{s}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n - \overline{x}}{s}\right)^2\right\}$$
$$= \frac{1}{n}\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{s^2}$$
$$= \frac{1}{n}\left\{(x_1 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2\right\} \cdot \frac{1}{s^2}$$
$$= s^2 \cdot \frac{1}{s^2}$$
$$= 1$$

よって、X' の標準偏差は 1 である。 $\cdots$(答)①

モンシロチョウの初見日のデータ M と、ツバメの初見日のデータ T について、上の変換を行ったデータをそれぞれ M', T' とする。
この変換を行ったとき、散布図の散らばり具合は形を維持して拡大縮小するか、平行移動されるだけなので、⓪ か ② に絞られる。
さらに、M' や T' の標準偏差は 1 であることを考慮すると、
もし、⓪ ならば、すべての偏差の絶対値が 1 未満なので、その分散を計算すると 1 未満になって標準偏差が 1 であることに矛盾する。
よって、② があてはまる。

第 3 問

赤い袋には赤球 2 個と白球 1 個が入っていて、白い袋には赤球 1 個と白球 1 個が入っている。
さいころを 1 個投げて 3 の倍数が出たら白い袋を選び、それ以外の目が出たら赤い袋を選ぶ。
選んだ袋から 1 個取り出し、色を確認したら元に戻す。
2 回目以降は、その取り出した色の袋を選び、同じ操作を行う。

(1) 1 回目の操作で、赤い袋が選ばれ赤球が取り出される確率について、
さいころを投げて赤い袋を選ぶ確率は $\dfrac{2}{3}$ であり、赤い

袋から赤球を取り出す確率は $\frac{2}{3}$ なので、

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}\cdots(\text{答})④、⑨$$

白い袋が選ばれ、赤球が取り出される確率について、
さいころを投げて白い袋を選ぶ確率は $\frac{1}{3}$ であり、白い袋から赤球を取り出す確率は $\frac{1}{2}$ なので、

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\cdots(\text{答})①、⑥$$

(2) 2 回目の操作が白い袋で行われる確率について、
1 回目で白球が選ばれる確率であるが、これは 1 回目で赤球が選ばれる確率の余事象であるから、

$$1-\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{6}\right)=1-\frac{11}{18}=\frac{7}{18}\cdots(\text{答})⑦、①、⑧$$

(3) 1 回目の操作で白球を取り出す確率を p で表すと、2 回目の操作で白球が取り出される確率について、

・確率 p で白い袋が選ばれ、白球を取り出す確率

・確率 $1-p$ で赤い袋が選ばれ、白球を取り出す確率

の和事象となるから、

$$\begin{aligned} p\cdot\frac{1}{2}+(1-p)\cdot\frac{1}{3}&=\frac{3}{6}p+\frac{1}{3}-\frac{2}{6}p\\ &=\frac{1}{6}p+\frac{1}{3}\cdots(\text{答})①、⑥\end{aligned}$$

と表される。

今、$p=\frac{7}{18}$ であるから、2 回目の操作で白球が取り出される確率は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{18}+\frac{1}{3}&=\frac{7}{108}+\frac{36}{108}\\ &=\frac{43}{108}\cdots(\text{答})④、③、①、⓪、⑧\end{aligned}$$

同様に、3 回目の操作で白球が取り出される確率は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\cdot\frac{43}{108}+\frac{1}{3}&=\frac{43}{648}+\frac{216}{648}\\ &=\frac{259}{648}\cdots(\text{答})②、⑤、⑨、⑥、④、⑧\end{aligned}$$

(4) 2 回目の操作で取り出した球が白球であったとき、その球を取り出した袋の色が白である条件付確率について、1 回目が白球で、2 回目の白い袋で白球を選ぶ確率は、

$$\frac{7}{18}\cdot\frac{1}{2}$$

であるから、

$$\frac{2\text{ 回目に白い袋から白球を取り出す確率}}{2\text{ 回目に白球を取り出す確率}}$$

$$=\frac{\frac{7}{18}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{43}{108}}$$

$$=\frac{21}{43}\cdots(\text{答})②、①、④、③$$

また、3 回目の操作で取り出した球が白球であったとき、はじめて白球が取り出されたのが 3 回目の操作である条件付確率について、
3 回目にはじめて白球が取り出される確率は、1 回目が赤球、2 回目も赤球で、3 回目に白球が取り出されればよいから、

$$\left(1-\frac{7}{18}\right)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{11}{3^4}$$

であるから、求める条件付き確率は、

$$\frac{3\text{ 回目にはじめて白球である確率}}{3\text{ 回目が白球である確率}}$$

$$=\frac{\frac{11}{3^4}}{\frac{259}{648}}$$

$$=\frac{88}{259}\cdots(\text{答})⑧、⑧、②、⑤、⑨$$

第 4 問

(1) 不定方程式 $49-23y=1$ の解となる自然数 x,y の中で、x の値が最小のものを考える。
ユークリッドの互除法より、

$49=23\cdot2+3$、すなわち、$3=49-23\cdot2$

$23=3\cdot7+2$、すなわち、$2=23-3\cdot7$

$3=2\cdot1+1$、すなわち、$1=3-2\cdot1$

よって、

$$\begin{aligned}1&=3-2\cdot1\\ 1&=3-(23-3\cdot7)\cdot1\\ 1&=3-23\cdot1+3\cdot7\\ 1&=3\cdot8-23\cdot1\\ 1&=(49-23\cdot2)\cdot8-23\cdot1\\ 1&=49\cdot8-23\cdot16-23\cdot1\\ 1&=49\cdot8-23\cdot17\end{aligned}$$

よって、$x=8, y=17$ である。$\cdots(\text{答})$⑧、①、⑦

さらに、k を整数としてすべての整数解を考える。

$$\begin{cases}49x-23y=1\\ 49\cdot8-23\cdot17=1\end{cases}$$

上から下を引くと、

$$\begin{aligned}49(x-8)-23(y-17)&=0\\ 49(x-8)&=23(y-17)\end{aligned}$$

いま、49 と 23 は互いに素なので、

$x-8=23k$、すなわち、$x=23k+8\cdots(\text{答})$②、③

よって、

$y-17=49k$ 、すなわち、$y=49k+17\cdots(\text{答})$④、⑨

(2) 49 の倍数である自然数 A と 23 の倍数である自然数 B の組 (A,B) を考える。A と B の差の絶対値が 1 となる組 (A,B) の中で、A が最小になるのは、(1) より、

$(A,B)=(49\times8, 23\times17)\cdots(\text{答})$⑧、①、⑦

である。
また、A と B の差の絶対値が 1 となる組 (A,B) の中で、A が最小になるものを考える。
上のユークリッドの互除法の式より、

$$2=23-3\cdot 7$$
$$2=23-(49-23\cdot 2)\cdot 7$$
$$2=23-49\cdot 7+23\cdot 14$$
$$2=49\cdot(-7)+23\cdot 15$$

すなわち、

$$-2=49\cdot 7-23\cdot 15$$

よって、

$(A,B)=(49\times 7-23\times 15)\cdots$(答)⑦、①、⑤

である。

(3) 連続する三つの自然数 $a, a+1, a+2$ を考える。
連続する 2 つの数は偶数と奇数が交互に並んでいるので、

a と $a+1$ の最大公約数は 1

$a+1$ と $a+2$ の最大公約数は 1

一方、a と $a+2$ は、ともに奇数か、ともに偶数であるから、

a と $a+2$ の最大公約数は 1 または $2\cdots$(答)②

である。
また、連続する 3 つの整数の積は 6 の倍数であるから、

$a(a+1)(a+2)$ は 6 の倍数 $\cdots$(答)⑥

となる。

(4) 6762 を因数分解すると、

$6762=2\times 3\times 7^2\times 23\cdots$(答)③、②、②、③

である。
b を $b(b+1)(b+2)$ が 6762 の倍数となる最小の自然数とする。このとき、$b, b+1, b+2$ のいずれかは 7^2 の倍数であり、また、$b, b+1, b+2$ のいずれかは 23 の倍数である。
つまり、49 の倍数と 23 の倍数の差が 1 または 2 になる組み合わせを探せばよいので、

$b=49\times 7$、または、$b=23\times 15$

そのなかで b が最小となるものは、

$49\times 7=343\cdots$(答)③、④、③

第 5 問

$\triangle ABC$ において、$AB=4, BC=7, AC=5$ とする。
このとき、$\cos\angle BAC=-\dfrac{1}{5}$、$\sin\angle BAC=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$。
すると、$\triangle ABC$ の面積は、

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

となる。
一方、$\triangle ABC$ の内接円の半径を r と置くと、$\triangle ABC$ の面積は、

$$\frac{1}{2}\cdot r\cdot(4+7+5)=\frac{1}{2}\cdot r\cdot 16$$

よって、

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot 16$$

$r=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdots$(答)⑥、②

この内接円と辺 AB との接点を D、辺 AC との接点を E し、辺 BC との接点を K とする。
$AD=x$ と置くと、

$$AE=x$$
$$BD=BK=4-x$$
$$CE=CK=5-x$$

よって、

$$BC=BK+CK=9-2x$$

いま、$BC=7$ だから、

$$9-2x=7$$
$$-2x=-2$$
$$x=1$$

よって、$AD=AE=1\cdots$(答)①
余弦定理より、

$$DE^2=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)$$
$$DE^2=\frac{12}{5}$$

$DE=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}\cdots$(答)②、①、⑤、⑤

線分 BE と線分 CD の交点を P、直線 AP と辺 BC の交点を Q とする。チェバの定理より、

$$\frac{CE}{AE}\cdot\frac{BQ}{CQ}\cdot\frac{AD}{BD}=1$$
$$\frac{4}{1}\cdot\frac{BQ}{CQ}\cdot\frac{1}{3}=1$$

$\dfrac{BQ}{CQ}=\dfrac{3}{4}\cdots$(答)③、④

よって、$BQ=3$ である。$\cdots$(答)③

すると、点 Q は点 K と一致する。$\triangle ABC$ の内心を I とすると、点 Q も点 K も内接円の接点であるから、IQ は内接円の半径となる。
よって、

$IQ=r=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdots$(答)⑥、②

また、直線 CP と $\triangle ABC$ との交点で D とは異なる点を F とすると、$\triangle DEF$ に外接する円 I に関して、正弦定理より、

$$\frac{DE}{\sin\angle DFE}=2\cdot IQ$$
$$DE=2\cdot IQ\cdot\sin\angle DFE$$

$$\frac{2\sqrt{15}}{5} = 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sin \angle DFE$$

$$\sin \angle DFE = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

よって、三角比の相互関係より、

$$\begin{aligned} \cos \angle DFE &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{15}{25}} \\ &= \frac{\sqrt{15}}{5} \cdots (\text{答})①、⑤、⑤ \end{aligned}$$

である。