2019年センター数学IIB解答解説

@aporia_life

2019年1月21日作成

第1問

[1] 関数 $f(\theta)=3\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$ を考える。

(1) $f(0)=3\cdot0^2+4\cdot0\cdot1-1^2$

$=-1\cdots$(答)⊖、①

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\cdot\left((\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\left((\frac{1}{2}\right)^2$$

$=2+\sqrt{3}\cdots$(答)②、③

(2) 2倍角の公式を用いて計算すると、

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{2}$$

$$\cos^2\theta=\frac{\cos2\theta+1}{2}\cdots(\text{答})②、②$$

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta$$

となるので、

$$f(\theta)=3\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}+4\cdot\frac{1}{2}\sin2\theta-\frac{1+\cos2\theta}{2}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos2\theta+2\sin2\theta-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\theta$$

$=2\sin2\theta-2\cos2\theta+1\cdots$(答)②、②、①

(3) θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき、関数 $f(\theta)$ のとり得る最大の整数の値 m とそのときの θ の値を求めよう。

> 三角関数の合成
>
> $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$
>
> ただし、$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$、$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

三角関数の合成を用いると、

$$f(\theta)=2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1\cdots(\text{答})②、②、④$$

となるので、$f(\theta)$ の最大値は

$2\sqrt{2}+1=2.828\cdots+1=3.828\cdots$

よって、$m=3\cdots$(答)③ である。

また、$0\leqq\theta\leqq\pi$ において、$f(\theta)=3$ となる θ の値を考えると、

$$2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1=3$$

$$2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2$$

$$\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi$$

$$2\theta=\frac{\pi}{2},\pi$$

$\theta=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\cdots$(答)④、②

[2] 連立方程式

$$\begin{cases}\log_2(x+2)-2\log_4(y+3)=-1\cdots② \\ \left(\frac{1}{3}\right)^y-11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0\cdots③\end{cases}$$

を満たす実数 x,y を求めよう。

② について、真数条件より、

$x+2>0$ かつ $y+3>0$

よって、

$x>-2,y>-3\cdots$(答)②

底の変換公式により、

$$\log_4(y+3)=\frac{\log_2(y+3)}{\log_2 4}=\frac{\log_2(y+3)}{2}\cdots(\text{答})②$$

である。

よって、② から、

$$\log_2(x+2)-2\cdot\frac{\log_2(y+3)}{2}=-1$$

$$\log_2(x+2)-\log_2(y+3)=\log_2\frac{1}{2}$$

$$\frac{x+2}{y+3}=\frac{1}{2}$$

$$2(x+2)=(y+3)$$

$$2x+4=y+3$$

$y=2x+1\cdots$④$\cdots$(答)②、①

が得られる。

次に、$t=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ と置くと、④ より、

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}-11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}\cdot\frac{1}{3}-11\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\cdot\frac{1}{3}+6=0$$

$$t^2\cdot\frac{1}{3}-11t\cdot\frac{1}{3}+6=0$$

$t^2-11t+18=0\cdots$⑤$\cdots$(答)①、①、①、⑧

$$(t-2)(t-9)=0$$

$$t=2,9$$

真数条件 $x>-2$ より、

$0 < t < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

$\therefore 0 < t < 9 \cdots$ ⑥ $\cdots$ (答)⓪、⑨

⑥ の範囲で方程式 ⑤ を解くと、

$t = 2 \cdots$ (答)②

したがって、

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x} = 2$

$3^{-x} = 2$

$-x = \log_3 2$

$x = -\log_3 2$

$x = \log_3 \frac{1}{2} \cdots$ (答)①、②

そして、$y = 2x + 1$ より、

$y = 2\log_3 \frac{1}{2} + 1$

$y = \log_3 \frac{1}{4} + \log_3 3$

$y = \log_3 \frac{3}{4} \cdots$ (答)③、④

であることが分かる。

第 2 問

p, q を実数とし、関数 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ は $x = -1$ で極値 2 をとるとする。

$f'(x) = 3x^2 + 2px + q$

また、座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C、

放物線 $y = -kx^2$ を D、放物線上の点 $(a, -ka^2)$ を A とする。ただし、$k > 0, a > 0$ である。

(1) 関数 $f(x)$ が $x = -1$ で極値をとるので、

$f'(-1) = 0 \cdots$ (答)⓪

$3 - 2p + q = 0$

これと、$f(-1) = 2$ より、

$-1 + p - q = 2$

p, q の連立方程式とみて上から下を足すと、

$2 - p = 2$

$p = 0 \cdots$ (答)⓪

$q = -3 \cdots$ (答)⊖、③

よって、

$f(x) = x^3 - 3x$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

よって、$x = -1, 1$ で極値をとる。

増減表を描くと、

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

よって、$x = 1$ のとき極小値 -2。$\cdots$ (答)①、⊖、②

(2) 点 A における放物線 D の接線を l とする。

D と l および x 軸で囲まれた図形の面積 S を a と k を用いて表そう。

$y = -kx^2$

$y' = -2kx$

点 A における微分係数は、$-2ka$ なので、l の方程式は、

$y - (-ka^2) = -2ka(x - a)$

$y = -2kax + ka^2 \cdots$ ① $\cdots$ (答)⊖、②、②

と表せる。

l と x 軸の交点の x 座標を求めると、

$0 = -2kax + ka^2$

$2kax = ka^2$

$x = \frac{a}{2} \cdots$ (答)ⓐ、②

である。

D と x 軸および、直線 $x = a$ で囲まれた図形の面積を求めると、

$\int_0^a kx^2 dx = \left[\frac{k}{3}x^3\right]_0^a = \frac{k}{3}a^3 \cdots$ (答)③、③

である。

一方で、放物線 D の接線と、直線 $x = a$、x 軸で囲まれた図形の面積を求めると、

$\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot ka^2 = \frac{k}{4}a^3$

よって、S の面積は、

$S = \frac{k}{3}a^3 - \frac{k}{4}a^3 = \frac{k}{12}a^3 \cdots$ (答)①、②

である。

(3) さらに、点 A が曲線 C 上にあり、かつ (2) の接線 l が C にも接するとする。このときの (2) の S の値を求めよう。

A が C 上にあるので、

$-ka^2 = a^3 - 3a$

$a > 0$ より、両辺を $-a^2$ で割ると、

$k = \frac{3}{a} - a \cdots$ (答)③、ⓐ、ⓐ

である。

l と C の接点の x 座標を b とする。

$f'(x) = 3x^2 - 3$ より、

$f'(b) = 3b^2 - 3$

よって、直線 l の方程式は、

$y - (b^3 - 3b) = (3b^2 - 3)(x - b)$

$y = (3b^2 - 3)x - 3b^3 + 3b + b^3 - 3b$

$y = 3(b^2 - 1)x - 2b^3 \cdots$ ② $\cdots$ (答)③、①、②

② の右辺を $g(x)$ とおくと、

$f(x) - g(x)$

$= (x^3 - 3x) - (3(b^2 - 1)x - 2b^3)$

$= x^3 - 3b^2x + 2b^3$

$x = b$ で接するので、$(x - b)$ で割っていくと、

$f(x) - g(x)$

$= (x-b)(x^2+bx+2b^2)$
$= (x-b)(x-b)(x-2b)$
$= (x-b)^2(x-2b) \cdots$(答)⑥、②

と因数分解されるので、$a=-2b$ となる。

① と ② の表す直線の傾きを比較すると、

$-2ka = 3(b^2-1)$

$k = \dfrac{3}{a} - a$、$a=-2b$ より、

$-2\left(\dfrac{3}{a}-a\right)a = 3\left\{\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2 - 1\right\}$

$-6+2a^2 = \dfrac{3}{4}a^2 - 3$

$-24+8a^2 = 3a^2-12$

$5a^2 = 12$

$a^2 = \dfrac{12}{5} \cdots$(答)①、②、⑤

これを S に代入すると、求める S の値は、

$$\begin{aligned}
S &= \frac{k}{12}a^3 \\
&= \left(\frac{3}{a}-a\right)\cdot\frac{1}{12}a^3 \\
&= (3a^2-a^4)\cdot\frac{1}{12} \\
&= \left\{3\cdot\left(\frac{12}{5}\right) - \left(\frac{12}{5}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{12} \\
&= \frac{12}{5}\cdot\left(3-\frac{12}{5}\right)\cdot\frac{1}{12} \\
&= \frac{12}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{12} \\
&= \frac{3}{25}\cdots
\end{aligned}$$
(答)③、②、⑤

第 3 問

初項が 3、公比が 4 の等比数列を $\{u_n\}$ と置くと、

$u_n = 3\cdot 4^{n-1}$

これの初項から第 n 項までの和を S_n とする。

また、数列 $\{T_n\}$ は、初項が -1 であり、$\{T_n\}$ の階差数列が数列 $\{S_n\}$ であるような数列とする。

(1) $S_2 = u_1+u_2$
$= 3+12$
$= 15\cdots$(答)①、⑤

$T_2 = -1+S_1$
$= -1+u_1$
$= -1+3$
$= 2\cdots$(答)②

(2) $\{S_n\}$ の一般項を求めると、

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} 3\cdot 4^{k-1} \\
&= 3\cdot\frac{4^n-1}{4-1} \\
&= 4^n-1\cdots
\end{aligned}$$
(答)④、①、①

一方で、$\{T_n\}$ の一般項を求めると、

$$\begin{aligned}
T_n &= -1+\sum_{k=1}^{n-1}(4^k-1) \\
&= -1+4\cdot\left(\frac{4^{n-1}-1}{4-1}\right)-(n-1) \\
&= -1+\frac{4^n}{3}-\frac{4}{3}-n+1 \\
&= \frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}\cdots
\end{aligned}$$
(答)④、①、③、④、③

(3) 数列 $\{a_n\}$ は、初項が -3 であり、漸化式、

$na_{n+1} = 4(n+1)a_n + 8T_n (n=1,2,\cdots)$

を満たすとする。$\{a_n\}$ の一般項を求めよう。

$b_n = \dfrac{a_n+2T_n}{n}$

により定められる数列 $\{b_n\}$ を考える。$\{b_n\}$ の初項は、

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{a_1+2T_1}{1} \\
&= \frac{-3-2}{1} \\
&= -5\cdots
\end{aligned}$$
(答)-、⑤

である。

$\{T_n\}$ について、

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= \frac{4^{n+1}}{3}-(n+1)-\frac{4}{3} \\
&= 4\cdot\frac{4^n}{3}-(n+1)-\frac{4}{3} \\
&= 4\left(\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}\right)+4n+\frac{16}{3}-(n+1)-\frac{4}{3} \\
&= 4T_n+3n+3\cdots
\end{aligned}$$
(答)④、③、③

を満たす。すると、

$2T_{n+1} = 8T_n+6n+6$

$\dfrac{2T_{n+1}}{n+1} = \dfrac{8T_n}{n+1}+6\cdots$①

一方で、

$na_{n+1} = 4(n+1)a_n+8T_n$

$\dfrac{a_{n+1}}{n+1} = 4\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{8}{n(n+1)}T_n\cdots$②

② に ① を足すと、

$$\frac{a_{n+1}+2T_{n+1}}{n+1} = \frac{4a_n}{n}+\frac{8}{n(n+1)}T_n+\frac{8T_n}{n+1}+6$$

$$\frac{a_{n+1}+2T_{n+1}}{n+1} = \frac{4a_n}{n}+\frac{8}{n(n+1)}T_n+\frac{8nT_n}{n(n+1)}+6$$

$$\frac{a_{n+1}+2T_{n+1}}{n+1} = \frac{4a_n}{n}+\frac{8(n+1)}{n(n+1)}T_n+6$$

$$\frac{a_{n+1}+2T_{n+1}}{n+1} = \frac{4a_n}{n}+\frac{8}{n}T_n+6$$

$$\frac{a_{n+1}+2T_{n+1}}{n+1} = 4\cdot\frac{a_n+2T_n}{n}+6$$

$b_{n+1} = 4b_n+6\cdots$(答)④、⑥

である。

よって、

$b_{n+1}+2 = 4(b_n+2)$

よって、$\{b_n+2\}$ は公比 4 の等比数列となるので、

$$b_n+2=(-5+2)\cdot 4^{n-1}$$
$$b_n+2=-3\cdot 4^{n-1}$$
$$b_n=-3\cdot 4^{n-1}-2\cdots(\text{答})-、3、0、2$$

したがって、

$$\frac{a_n+2T_n}{n}=-3\cdot 4^{n-1}-2$$
$$a_n+2T_n=-3n\cdot 4^{n-1}-2n$$
$$a_n=-3n\cdot 4^{n-1}-2n-2\left(\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}\right)$$
$$a_n=\frac{-9n\cdot 4^{n-1}-6n-2\cdot 4^n+6n+8}{3}$$
$$a_n=\frac{-9n\cdot 4^{n-1}-8\cdot 4^{n-1}+8}{3}$$
$$a_n=\frac{-(9n+8)\cdot 4^{n-1}+8}{3}\cdots(\text{答})-、9、8、8、3$$

第 4 問

四角形 $ABCD$ を底面とする四角錐 $OABCD$ を考える。四角形 $ABCD$ は、辺 AD と辺 BC が平行で、$AB=CD$、$\angle ABC=\angle BCD$ を満たす等脚台形であるとする。さらに、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$、$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし、

$$|\vec{a}|=1、|\vec{b}|=\sqrt{3}、|\vec{c}|=\sqrt{5}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1、\vec{b}\cdot\vec{c}=3、\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

であるとする。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ より、

$$\angle AOC=90^\circ\cdots(\text{答})9、0$$

よって、三角形 OAC は直角三角形なので、面積は、

$$\begin{aligned}OA\cdot OC\cdot\frac{1}{2}&=|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot\frac{1}{2}\\&=1\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdots(\text{答})5、2\end{aligned}$$

である。

(2) $$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{c})\\&=|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\\&=3-3-1+0\\&=-1\cdots(\text{答})-、1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2&=|\vec{b}-\vec{a}|^2\\&=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2\\&=3-2+1\\&=2\end{aligned}$$

よって、

$$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=\sqrt{2}\cdots(\text{答})2$$

一方で、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2&=|\vec{b}-\vec{c}|^2\\&=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2\\&=3-6+5\\&=2\end{aligned}$$

よって、

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{2}\cdots(\text{答})2$$

である。すると、

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos\angle ABC$$

なので、

$$\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

よって、

$$\angle ABC=120^\circ\cdots(\text{答})1、2、0$$

さらに、辺 AD と辺 BC が平行であるから、

$$\begin{aligned}\angle BAD&=\angle ADC\\&=180^\circ-\angle ABC\\&=60^\circ\cdots(\text{答})6、0\end{aligned}$$

である。

直線 AB と直線 DC の交点を E と置くと、$AD\,/\!/\,BC$ と $\angle BAD=60^\circ$ より、$\triangle EBC$ は正三角形となる。$AB=BC=\sqrt{2}$ より、$EB:EA=1:2$ となるので、

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdots(\text{答})2$$

となる。

よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=\vec{a}+2(\vec{c}-\vec{b})\\&=\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}\cdots(\text{答})2、2\end{aligned}$$

と表される。

また、四角形 $ABCD$ の面積は、

(四角形 $ABCD$ の面積)

$$\begin{aligned}&=(\triangle ABC\text{ の面積})+(\triangle ACD\text{ の面積})\\&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 120^\circ+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sin 60^\circ\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdots(\text{答})3、3、2\end{aligned}$$

である。

(3) 三角形 OAC を底面とする三角錐 $BOAC$ の体積 V を求めよう。

3 点 O,A,C の定める平面 α 上に、点 H を、$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\vec{c}$ が成り立つようにとる。$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|$ は三角錐 $BOAC$ の高さである。H は α 上の点であるから、実数 s,t を用いて、

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{a}} + t\overrightarrow{\mathrm{c}}$

と表せる。

$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = s\overrightarrow{\mathrm{a}} - \overrightarrow{\mathrm{b}} + t\overrightarrow{\mathrm{c}}$

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ は平面 α に垂直だから、

$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{a}} = 0 \cdots$ (答)⓪

$(s\overrightarrow{\mathrm{a}} - \overrightarrow{\mathrm{b}} + t\overrightarrow{\mathrm{c}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{a}} = 0$

$s|\overrightarrow{\mathrm{a}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{b}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{a}} + t\overrightarrow{\mathrm{c}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{a}} = 0$

$s - 1 = 0$

$s = 1 \cdots$ (答)①

同様に、

$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{c}} = 0$

$(s\overrightarrow{\mathrm{a}} - \overrightarrow{\mathrm{b}} + t\overrightarrow{\mathrm{c}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{c}} = 0$

$s\overrightarrow{\mathrm{a}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{c}} - \overrightarrow{\mathrm{b}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{c}} + t|\overrightarrow{\mathrm{c}}|^2 = 0$

$5t - 3 = 0$

$t = \frac{3}{5} \cdots$ (答)③、⑤

である。

よって、

$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \overrightarrow{\mathrm{a}} - \overrightarrow{\mathrm{b}} + \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{c}}$

なので、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{a}} - \overrightarrow{\mathrm{b}} + \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{c}}|^2 \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{a}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{b}}|^2 + \frac{9}{25}|\overrightarrow{\mathrm{c}}|^2 \\ &\quad -2\overrightarrow{\mathrm{a}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{b}} - \frac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{b}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{c}} + \frac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{a}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{c}} \\ &= 1 + 3 + \frac{9}{5} - 2 - \frac{18}{5} \\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

よって、

$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}| = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdots$ (答)⑤、⑤

である。

すると、(1) より、

$V = (\text{三角形 } OAC \text{ の面積}) \cdot |\overrightarrow{\mathrm{BH}}| \cdot \frac{1}{3}$

$= \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{6} \cdots$ (答)①、⑥

であることがわかる。

(4) (3) の V を用いると、$\triangle ABC : \triangle ACD = 1 : 2$ より、四角錐 $OABCD$ の体積は、

$(\text{三角錐 } BOAC \text{ の体積}) + (\text{三角錐 } DOAC \text{ の体積})$

$= V + 2V$

$= 3V \cdots$ (答)③

と表せるので、

$(\text{四角錐 } OABCD \text{ の体積}) = \frac{1}{2}$

ここで、四角形 $ABCD$ を底面としたときの高さを h とすると、四角形 $ABCD$ の面積は $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ であったから、

$\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot h \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

よって、

$h = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdots$ (答)③、③

第 5 問

(1) 確率変数 X の期待値は $E(X) = -7$、標準偏差は $\sigma(X) = 5$ とする。分散を $V(X)$ とすると、

$V(X) = 5^2 = 25$

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ より、

$25 = E(X^2) - (-7)^2$

$E(X^2) = 74 \cdots$ (答)⑦、④

である。

また、測定単位を変更して、$W = 1000X$ とすると、その期待値は、$E(kX) = kE(X)$(k は実数) より、

$$\begin{aligned}E(W) &= E(1000X) \\ &= 1000E(X) \\ &= -7 \times 10^3 \cdots \text{(答)③}\end{aligned}$$

となる。

また、分散は、$V(kX) = k^2V(X)$(k は実数) より、

$$\begin{aligned}V(W) &= V(1000X) \\ &= 1000^2V(X) \\ &= 5^2 \times 10^6 \cdots \text{(答)②、⑥}\end{aligned}$$

となる。

(2) (1) の X が正規分布に従うとするとき、物質 A の量が減少しない確率 $P(X \geqq 0)$ を求めよう。

$P(X \geqq 0)$

$= P(X + 7 \geqq 7)$

$= P\left(\frac{X+7}{5} \geqq \frac{7}{5}\right)$

$= P\left(\frac{X+7}{5} \geqq 1.4\right) \cdots$ (答)①、④

であるので、標準正規分布に従う確率変数を Z とすると、正規分布表から、

$$\begin{aligned}P(Z \geqq 1.4) &= 1 - P(Z \leqq 1.4) \\ &= 1 - (0.5 + 0.4192) \\ &= 0.0808 \\ &\fallingdotseq 0.08 \cdots ① \cdots \text{(答)⓪、⑧}\end{aligned}$$

無作為に抽出された 50 人がこの食品を摂取したときに、物質 A の量が減少するか、減少しないかを考え、物質 A の量が減少しない人数を表す確率変数を M とする。

M は二項分布 $B(50, 0.08)$ に従う。

二項分布 $B(n,p)$

期待値は np
分散は $np(1-p)$

二項分布 $B(n,p)$ の期待値は、

$E(M) = 50 \cdot 0.08 = 4.0 \cdots$ (答)④、⓪

二項分布 $B(n,p)$ の分散は、

$V(M) = 50 \cdot 0.08 \cdot 0.92 = 3.68 \fallingdotseq 3.7$

よって、標準偏差は、

$\sigma(M) = \sqrt{3.7} \cdots$ (答)③、⑦

となる。

(3) (1) の食品接種前と摂取してから 3 時間後に、それぞれ一定量の血液に含まれる別の物質 B の量 (単位は mg) を測定し、その変化量を表す確率変数を Y とする。
Y の母集団分布は母平均 m、母標準偏差 6 をもつとする。m を推定するため、母集団から無作為に抽出された 100 人に対して物質 B の変化量を測定したところ、標本平均 $\overline{Y}$ の値は -10.2 であった。

標本平均の平均と標準偏差

母平均 m、母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を復元抽出するとき、
標本平均 $\overline{X}$ の平均は、$E(\overline{X}) = m$
標本平均 $\overline{X}$ の標準偏差は、$\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\overline{Y}$ の期待値は、

$E(\overline{Y}) = m$

$\sigma(\overline{Y}) = \dfrac{6}{\sqrt{100}} = \dfrac{6}{10} = 0.6 \cdots$ (答)⓪、⑥

である。

$\overline{Y}$ の分布が正規分布で近似できるとすれば、

$Z = \dfrac{\overline{Y} - m}{0.6}$

は近似的に標準正規分布に従うとみなすことができる。

正規分布表を用いて $|Z| \leqq 1.64$ となる確率を求める。

$P(|Z| \leqq 1.64)$
$= 2 \cdot P(0 \leqq Z \leqq 1.64)$
$= 2 \cdot 0.4495$
$= 0.8990$
$\fallingdotseq 0.90$

よって、$|Z| \leqq 1.64$ となる確率を求めると、0.90 となる。$\cdots$ (答)⑨、⓪

信頼区間

母分散 σ^2 がわかっている母集団から大きさ n の標本を抽出するとき、n が大きければ、母平均 m に対する信頼度 90% の信頼区間は、

$$\overline{X} - 1.64 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.64 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

同様に、信頼度 95% の信頼区間は、

$$\overline{X} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

このことを利用して、母平均 m に対する信頼度 90% の信頼区間、すなわち、90% の確率で m を含む信頼区間を求めると、

$\overline{Y} - 1.64 \times \sigma(\overline{Y}) \leqq m \leqq \overline{Y} + 1.64 \times \sigma(\overline{Y})$
$-10.2 - 1.64 \times 0.6 \leqq m \leqq -10.2 + 1.64 \times 0.6$
$-11.184 \leqq m \leqq -9.216$
$\therefore -11.2 \leqq m \leqq -9.2 \cdots$ (答)②