2020年センター数学IA解答解説

第1問

[1] a を定数とする。

(1) 直線 $l : y = (a^2 - 2a - 8)x + a$ の傾きが負となるのは、

$a^2 - 2a - 8 < 0$

$(a-4)(a+2) < 0$

$-2 < a < 4$ $\cdots$(答)⊖、②、④

のときである。

(2) $a^2 - 2a - 8 \fallingdotseq 0$ であるとする。

直線 l と x 軸との交点の x 座標を b とする。

$$b = -\frac{a}{a^2 - 2a - 8}$$

$a > 0$ の場合について、$b > 0$ であるためには、

$a^2 - 2a - 8 < 0$

$(a-4)(a+2) < 0$

$-2 < a < 4$

$a > 0$ より、

$0 < a < 4$ $\cdots$(答)⓪、④

$a \leqq 0$ の場合について、

$b > 0$ であるためには、$a^2 - 2a - 8 \fallingdotseq 0$ より、

$a^2 - 2a - 8 > 0$

$(a-4)(a+2) > 0$

$a < -2, 4 < a$

$a \leqq 0$ より、

$a < -2$ $\cdots$(答)⊖、②

また、$a = \sqrt{3}$ のとき、

$$b = -\frac{\sqrt{3}}{3 - 2\sqrt{3} - 8}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{5 + 2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(5 - 2\sqrt{3})}{25 - 12}$$

$$= \frac{5\sqrt{3} - 6}{13}$$ $\cdots$(答)⑤、③、⑥、①、③

[2] 自然数 n に関する三つの条件 p, q, r について、

$p : n$ は 4 の倍数である

$q : n$ は 6 の倍数である

$r : n$ は 24 の倍数である

(1) 32 は 4 の倍数であるが、6 の倍数ではないので、

$32 \in P \cap \overline{Q}$

一方、50 は 4 の倍数でも、6 の倍数でも、24 の倍数でもないから、

$32 \in \overline{P} \cap \overline{Q} \cap \overline{R}$ $\cdots$(答)⑤

(2) $P \cap Q$ に属する自然数のうち最小のものを考える。

4 の倍数かつ 6 の倍数の中の最小公倍数なので、求める数は 12 である。

また、$12 \notin R$ である。 $\cdots$(答)①、②、④

(3) p かつ q は 12 の倍数であり、集合 R は 12 の倍数の集合に含まれているから、

$R \subset (P \cap Q)$

よって、$12 \in (P \cap Q)$ かつ $12 \in R$ であるものを考えると、12 は「(p かつ q) $\Rightarrow r$」の反例となっている。

$\cdots$(答)③

[3] (1) 2 点 $(c, 0)$ と $(c+4, 0)$ を通るので、G の軸は

$x = c + 2$

また、$y = x^2$ を平行移動したグラフなので、軸から x 軸との交点までの差が 2 であることから、G の頂点は

$(c+2, -4)$

よって、G をグラフに持つ 2 次関数は、

$y = \{x - (c+2)\}^2 - 4$

$y = x^2 - 2(c+2)x + (c+2)^2 - 4$

$y = x^2 - 2(c+2)x + c^2 + 4c + 4 - 4$

$y = x^2 - 2(c+2)x + c^2 + 4c$

$y = x^2 - 2(c+2)x + c(c+4)$ $\cdots$(答)②、④

と表せる。

2 点 $(3, 0), (3, -3)$ を両端とする線分と G が共有点を持つことを考えると、$x = 3$ のときの y の値が $-3 \leqq y \leqq 0$ であればよいので、

$-3 \leqq 9 - 6(c+2) + c(c+4) \leqq 0$

$-3 \leqq c^2 - 2c - 3 \leqq 0$

$0 \leqq c^2 - 2c$　かつ　$c^2 - 2c - 3 \leqq 0$

$c(c-2) \geqq 0$　かつ　$(c-3)(c+1) \leqq 0$

$c \leqq 0, 2 \leqq c$　かつ　$-1 \leqq c \leqq 3$

よって、

$-1 \leqq c \leqq 0, 2 \leqq c \leqq 3$ $\cdots$(答)①、⓪、②、③

である。

(2) $2 \leqq c \leqq 3$ の場合を考える。

G が $(3, -1)$ を通るとき、

$-1 = 9 - 6(c+2) + c(c+4)$

$-1 = c^2 - 2c - 3$

$c^2 - 2c - 2 = 0$

$(c-1)^2 = 3$

$c = 1 \pm \sqrt{3}$

$2 \leqq c \leqq 3$ より、

$c = 1 + \sqrt{3}$

よって、グラフ G の頂点は $(3 + \sqrt{3}, -4)$ となるので、$y = x^2$ のグラフを x 軸方向に $3 + \sqrt{3}$、y 軸方向に -4 だけ平行移動したものとなる。 $\cdots$(答)③、③、⊖、④

このとき G と y 軸との交点を求めることを考える。
このグラフの軸と y 軸との距離は $3+\sqrt{3}$ である。
このグラフは $y=x^2$ のグラフを平行移動したものなので、G のグラフの y 切片は、頂点の y 座標より $(3+\sqrt{3})^2$ だけ大きいので、
求める y 座標は、

$-4+(3+\sqrt{3})^2=8+6\sqrt{3}$ $\cdots$(答)⑧、⑥、③

第 2 問

[1] $\triangle ABC$ において、$BC=2\sqrt{2}$ とする。
$\angle ACB$ の二等分線と辺 AB の交点を D とし、

$CD=\sqrt{2}$

$\cos\angle BCD=\dfrac{3}{4}$

とする。
このとき、$\triangle BCD$ について、余弦定理より、

$BD^2=(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos\angle BCD$

$BD^2=2+8-6$

$BD^2=4$

$BD=2$ $\cdots$(答)②

再び、余弦定理より、

$$\cos\angle BDC=\frac{4+2-8}{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}}=\frac{-2}{4\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

よって、

$$\sin\angle ADC=\sin\angle BDC=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{4}$$

$\cdots$(答)①、④、④

である。CD が $\angle ACB$ の角の二等分線なので、

$AC:BC=AD:BD$

$AC:2\sqrt{2}=AD:2$

$2AC=2\sqrt{2}AD$

$\dfrac{AC}{AD}=\sqrt{2}$ $\cdots$(答)②

$AC=\sqrt{2}AD$

ここで、

$$\cos\angle ADC=-\cos\angle BDC=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$\triangle ACD$ において余弦定理を用いると、

$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos\angle ADC$

$2AD^2=AD^2+2-2\sqrt{2}AD\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$AD^2=1$

$AD=1$ $\cdots$(答)①

よって、$AC=\sqrt{2}$ となり、$CA=CD$ の二等辺三角形となるので、

$$\sin\angle BAC=\sin\angle CDA=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

よって、正弦定理より、外接円の半径は、

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{\sqrt{7}}=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

$\cdots$(答)④、⑦、⑦

[2] (1)

⓪ 平均値は第 1 四分位数と第 3 四分位数の間に必ずあるわけではないので偽である。

① 四分位範囲は標準偏差より大きいとは限らないので偽である。

② 中央値より小さい観測値の個数は 49 とは限らないので偽である。

③ 最大値に等しい観測値を 1 個削除しても、第 1 四分位数は変わらないので真である。

④ 第 1 四分位数より小さい観測値と、第 3 四分位数より大きい観測値をすべて削除すると、残りの観測値の個数は 51 弧とは限らないので偽である。

⑤ 第 1 四分位数より小さい観測値と、第 3 四分位数より大きい観測値とをすべて削除すると、残りの観測値は第 1 四分位数から第 3 四分位数までの範囲は四分位範囲に等しいので真である。

$\cdots$(答)③、⑤

(2) (I) について、四分位範囲は、$P10$ が 1 を超えているので偽である。
(II) について、箱ひげ図の中央値は小さい値から大きい値に順に並んでいないので偽である。
(III) P1 のデータの値と、P47 のデータの値とを比較することを考える。箱ひげ図のそれぞれの領域ごとに比較してもどれも 1.5 以上の差がみられるので、真である。

$\cdots$(答)⑥

(3) 全体の度数が 20 であるから、第 1 四分位数は小さいほうから 5 番目と 6 番目の平均を、中央値は小さいほうから 10 番目と 11 番目の平均を、第 3 四分位数は大きいほうから 5 番目と 6 番目の平均をとると、

第 1 四分位数は 80 以上 80.5 未満

中央値は 80.5 以上 81.0 未満

第 3 四分位数は 80.5 以上 81.5 未満

よって、この時点で ③, ④となる。
さらに、最小値は 79.5 以上 80.0 未満であり、最大値は 81.5 以上 82.0 未満なので、対応する箱ひげ図は ④となる。$\cdots$(答)④

(4) 差が 7.0 以上 7.5 未満の度数は 3 個なので、対応するヒストグラムは ③となる。$\cdots$(答)③

第 3 問

[1] ⓪「1 毎のコインを投げる試行を 5 回繰り返すとき、少なくとも 1 回は表が出る確率を p とすると、$p>0.95$ である。」について、

すべて裏である確率は、

$${}_5C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}=0.03125$$

よって、

$$p=1-0.03125=0.96875>0.95$$

なので、真である。

①「袋の中に赤球と白球が合わせて 8 弧入っている。球を 1 弧取り出し、色を調べてから袋に戻す試行を行う。この試行を 5 回繰り返したところ赤球が 3 回出た。したがって、1 回の施行で赤玉が出る確率は $\frac{3}{5}$ である。」について、袋の中の赤玉の個数を k 個とすると、5 回繰り返したとき、赤玉が出る確率は、

$${}_5C_3\left(\frac{k}{8}\right)^3\left(\frac{8-k}{8}\right)^2=\frac{10\cdot k^3\cdot(8-k)^2}{8^5}$$

$k=3$ を代入すると、

$$\frac{10\cdot 3^3\cdot 5^2}{8^5}=\frac{3^3\cdot 5^3}{4\cdot 8^4}\fallingdotseq\frac{3}{5}$$

よって、① は偽である。

②「箱の中に「い」と書かれたカードが 1 枚、「ろ」と書かれたカードが 2 枚、「は」と書かれたカードが 2 枚数の合計 5 枚のカードが入っている。同時に 2 枚のカードを取り出すとき、書かれた文字が異なる確率は $\frac{4}{5}$ である。」について、

書かれた文字が異なるパターンは「い」と「ろ」、または、「い」と「は」、または、「ろ」と「は」なので、その確率を求めると、

$$\frac{{}_1C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_2C_0+{}_1C_1\cdot{}_2C_0\cdot{}_2C_1+{}_1C_0\cdot{}_2C_1\cdot{}_2C_1}{{}_5C_2}$$

$$=\frac{2+2+4}{10}=\frac{4}{5}$$

よって、真である。

＜別解＞

逆に、同じカードを取り出すパターンが、「ろ」が 1 通り、「は」が 1 通りしかないので、余事象を考えると、

$$1-\frac{1+1}{{}_5C_2}$$

$$=1-\frac{2}{10}$$

$$=\frac{8}{10}$$

$$=\frac{4}{5}$$

よって、真である。

③「コインの面を見て表または裏とだけ発言するロボットが 2 体ある。ただし、どちらのロボットも出た面に対して正しく発音する確率が 0.9、正しく発音しない確率が 0.1 であり、これら 2 体は互いに影響されることなく発言するものとする。いま、ある人が 1 枚のコインを投げる。出た面を見た 2 体が、ともに表と発言した時に、実際に表が出ている確率を p とすると、$p\leqq 0.9$ である。」について、

実際	2 体のロボットの反応	確率
表	表表	$0.5\times0.9\times0.9$
表	表裏	${}_2C_1 0.5\times0.9\times0.1$
表	裏裏	$0.5\times0.9\times0.9$
裏	表表	$0.5\times0.1\times0.1$
裏	表裏	${}_2C_1 0.5\times0.1\times0.9$
裏	裏裏	$0.5\times0.9\times0.9$

よって、

$$p=\frac{0.5\times0.9\times0.9}{0.5\times0.9\times0.9+0.5\times0.1\times0.1}=\frac{81}{82}>0.9$$

よって、偽である。

$\cdots$(答)⓪、②

[2] 1 枚のコインを最大で 5 回投げるゲームを行う。

(1) コインを 2 回投げ終わって持ち点が -2 点である確率について、

2 回とも裏が出ればよいので、

$${}_2C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$ $\cdots$(答)①、④

また、コインを 2 回投げ終わって持ち点が 1 点である確率について、表が 1 回、裏が 1 回出ればよいので、

$${}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$ $\cdots$(答)①、②

(2) 持ち点が再び 0 点になることが起こるのは、表 1 回と裏 2 回のペアが出て点が相殺される場面なので、コインを 3 回投げ終わったときに起こる。 $\cdots$(答)③

ここで、コインを 3 回投げ終わって持ち点が 0 になる確率について、

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$ $\cdots$(答)③、⑧

(3) ゲームが終了した時点で持ち点が 4 点である確率について、

5 回中 3 回表が出ることを考えると、

表表表裏裏、表表裏表裏、表裏表表裏、裏表表表裏、表表裏裏表、表裏表裏表、裏表表裏表、表裏裏表表、裏表裏表表、裏裏表表表の 10 通り、

その中で、表裏裏表表、裏表裏表表、裏裏表表表は 3 回目でゲームが終了してしまうので、

$$({}_5C_3-3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{32}$$ $\cdots$(答)⑦、③、②

(4) ゲームが終了した時点で持ち点が 4 点であるとき、コインを 2 回投げ終わって持ち点が 1 点である条件付確率を求める。

上の中でコインを 2 回投げ終わって持ち点が 1 点であるとき、表裏…と続くものであるから、表裏表表裏、表裏表裏表 2 通りなので、$\frac{2}{7}$ $\cdots$(答)②、⑦

第 4 問

(1) $x = 2.3636\cdots$ とする。

$100x = 236.3636\cdots$ となるので、

$100x - x = 236.\dot{3}\dot{6} - 2.\dot{3}\dot{6}$

$99x = 234$

$11x = 26$

$x = \dfrac{26}{11}$ $\cdots$(答)②、⑥、①、①

(2) 有理数 y は 7 進法で表すと、二つの数字の並び ab が繰り返し現れる循環小数 $2.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$ である。

$y = 2.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$

$49y = 2ab.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$

$49y - y = 2ab.\dot{a}\dot{b}_{(7)} - 2.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$

$48y = 2 \cdot 49 + a \cdot 7 + b - 2$

$48y = 96 + 7a + b$

$y = \dfrac{96 + 7 \times a + b}{48}$ $\cdots$(答)⑨、⑥、④、⑧

(i) y が、分子が奇数で分母が 4 である分数で表されるものを考える。

つまり、$96 + 7a + b$ が 12 の倍数でなければならない。

両辺を 12 を法として、

$7a + b \equiv 0 \ (mod \ 12)$

いま、a, b は 0 以上 6 以下の異なる整数であるから、

$(a, b) = (1, 5), (5, 1)$

よって、

$y = \dfrac{9}{4}$ または、$y = \dfrac{11}{4}$ $\cdots$(答)⑨、①、①

のときである。

$y = \dfrac{11}{4}$ のときは、$7 \times a + b = 36$ であるから、

$a = 5, b = 1$ $\cdots$(答)⑤、①

(ii) $y - 2$ は分子が 1 で分母が 2 以上の整数である分数で表されるとする。

$y - 2 = \dfrac{7 \times a + b}{48}$

であるから、$7 \times a + b$ は、$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24$ となればよい。

これを満たす 0 以上 6 以下の整数 a, b の組合せは、

$(a.b) = (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 6),$
$(1, 1), (1, 5), (2, 2), (3, 3)$

この中で、$a \fallingdotseq b$ であるものは

$(a.b) = (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 6), (1, 5)$

の 6 個ある。 $\cdots$(答)⑥

第 5 問

チェバの定理より、

$\dfrac{GB}{AG} \cdot \dfrac{DC}{BD} \cdot \dfrac{DA}{CE} = 1$

$\dfrac{GB}{AG} \cdot \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{7}{1} = 1$

$\dfrac{GB}{AG} = 1$ $\cdots$(答)①

メネラウスの定理より、

$\dfrac{FD}{AF} \cdot \dfrac{BC}{DB} \cdot \dfrac{EA}{CE} = 1$

$\dfrac{FD}{AF} \cdot \dfrac{8}{7} \cdot \dfrac{7}{1} = 1$

$\dfrac{FD}{AF} = \dfrac{1}{8}$ $\cdots$(答)①、⑧

再び、メネラウスの定理より、

$\dfrac{FC}{GF} \cdot \dfrac{DB}{CD} \cdot \dfrac{AG}{BA} = 1$

$\dfrac{FC}{GF} \cdot \dfrac{7}{1} \cdot \dfrac{1}{2} = 1$

$\dfrac{FC}{GF} = \dfrac{2}{7}$ $\cdots$(答)②、⑦

である。したがって、

$\triangle CDG$ の面積 $= \dfrac{1}{8} \triangle BCG$ の面積

$\triangle BFG$ の面積 $= \dfrac{7}{9} \triangle BCG$ の面積

よって、

$\dfrac{\triangle CDG \text{ の面積}}{\triangle BFG \text{ の面積}} = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{9}} = \dfrac{9}{56}$ $\cdots$(答)⑨、⑤、⑥

方べきの定理より、

$AF \cdot AD = AG \cdot AB$

$AG = \dfrac{1}{2} AB$ であるから、

$8 \cdot 9 = \dfrac{1}{2} AB \cdot AB$

$AB^2 = 16 \cdot 9$

$AB = 4 \cdot 3 = 12$ $\cdots$(答)①、②

$AE = 3\sqrt{7}$ より、

$CE = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

なので、

$AE \cdot AC = 3\sqrt{7} \cdot \dfrac{24\sqrt{7}}{7} = 72$ $\cdots$(答)⑦、②

ここで、$AG \cdot AB = 6 \cdot 12 = 72$ であるから、

$AG \cdot AB = AE \cdot AC = 72$

よって、方べきの定理の逆より、4 点 B, C, E, G は同一円周上にある。

ゆえに、

$\angle AEG = \angle ABC$ $\cdots$(答)②