2020 年センター数学 IIB 解答解説

第 1 問

[1] (1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、

$\sin\theta > \sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \cdots ①$

となる θ の値の範囲を求めよう。

加法定理を用いると。

$\sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$

$= \sqrt{3}\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{3}{2}\sin\theta$ $\cdots$(答)③、②、③

である。よって、① は、

$\sin\theta > \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{3}{2}\sin\theta$

$\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta < 0$

ここで三角関数の合成を用いると、

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) < 0$ $\cdots$(答)③

よって、

$\pi < \theta + \frac{\pi}{3} < 2\pi$

$\frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{5}{3}\pi$ $\cdots$(答)②、③、⑤、③

(2) $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ とし、k を実数とする。$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は x の 2 次方程式

$25x^2 - 35x + k = 0$

の解であるとする。このとき、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5} \\ \sin\theta\cos\theta = \frac{k}{25} \end{cases}$$

ここで、$2\sin\theta\cos\theta = (\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1$ であるから、

$2 \cdot \frac{k}{25} = \frac{24}{25}$

$k = 12$ $\cdots$(答)①、②

さらに、θ が $\sin\theta \geqq \cos\theta$ を満たすとする。

$25x^2 - 35x + 12 = 0$

$(5x-3)(5x-4) = 0$

$x = \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$

$\sin\theta \geqq \cos\theta$ より、

$\sin\theta = \frac{4}{5}$、$\cos\theta = \frac{3}{5}$ $\cdots$(答)④、⑤、③、⑤

このときの θ は、

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$

より、

$\frac{\pi}{4} \leqq \theta < \frac{\pi}{3}$ $\cdots$(答)③

[2] (1) t は正の実数であり、$t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} = -3$ を満たす。

両辺を 2 乗すると、

$t^{\frac{2}{3}} - 2 + t^{-\frac{2}{3}} = 9$

$t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = 9 + 2 = 11$ $\cdots$(答)①、①

である。さらに、

$(t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}})^2 = t^{\frac{2}{3}} + 2 + t^{-\frac{2}{3}} = 13$

よって、

$t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{13}$ $\cdots$(答)①、③

また、

$t - t^{-1}$

$= (t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}})^3 + 3 \cdot t^{\frac{1}{3}} \cdot t^{-\frac{1}{3}}(t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}})$

$= -27 + 3 \cdot (-3) = -36$ $\cdots$(答)-、③、⑥

(2) x, y は正の実数とする。連立不等式

$$\begin{cases} \log_3(x\sqrt{y}) \leqq 5 \cdots ② \\ \log_{81}\frac{y}{x^3} \leqq 1 \cdots ③ \end{cases}$$

について考える。

$X = \log_3 x, Y = \log_3 y$ と置くと、②は、

$\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 y \geqq 5$

$X + \frac{1}{2}Y \geqq 5$

$2X + Y \geqq 10$ $\cdots$(答)②、①、⓪

と変形できる。③ は、

$\log_{81}\frac{y}{x^3} \leqq 1$

$\frac{\log_3 \frac{y}{x^3}}{\log_3 81} \leqq 1$

$\frac{\log_3 y - 3\log_3 x}{4} \leqq 1$

$\frac{Y - 3X}{4} \leqq 1$

$-3X + Y \leqq 4$

$3X - Y \geqq -4$ $\cdots$(答)③、-、④

と変形できる。

X, Y が ④, ⑤ を満たすときの共有点を求める。

$3X + 4 = -2X + 10$

$5X = 6$

$X = \frac{6}{5}$

このときの Y は

$Y = \frac{18}{5} + 4 = \frac{38}{5}$

よって、④, ⑤ を満たすときの Y の範囲は

$Y \leqq \frac{38}{5}$

であるから、Y の取りうる最大の整数は 7。 $\cdots$(答)⑦

また、x, y が ②, ③ と $\log_3 y = 7$ を満たすとする。
$\log_3 y = 7$ のときの ④ と ⑤ の交点を求めると、

$$\begin{cases} 7 \leqq 3X + 4 \\ 7 \geqq -2X + 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X \geqq 1 \\ X \leqq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

よって、

$$1 \leqq X \leqq \frac{3}{2}$$

$$1 \leqq \log_3 x \leqq \frac{3}{2}$$

$$3 \leqq x \leqq 3\sqrt{3}$$

よって x の取りうる最大の整数は 5 である。 $\cdots$(答)⑤

第 2 問

$a > 0$ とし、$f(x) = x^2 - (4a-2)x + 4a^2 + 1$ とおく。座標平面上で放物線 $y = x^2 + 2x + 1$ を C、放物線 $y = f(x)$ を D とする。また、l を C と D の両方に接する直線とする。

(1) l の方程式を求めよう。
l と C は点 $(t, t^2 + 2t + 1)$ において接するとする。
$y = x^2 + 2x + 1$ を微分すると、

$$y' = 2x + 2$$

よって、$x = t$ での傾きは $2t + 2$ であるから、l の方程式は、

$$y = (2t+2)(x-t) + t^2 + 2t + 1$$

$$y = (2t+2)x - 2t^2 - 2t + t^2 + 2t + 1$$

$$y = (2t+2)x - t^2 + 1 \cdots ①$$

$\cdots$(答)②、②、①

また、l と D は点 $(s, f(s))$ において接するとすると、$f'(s) = 2s - (4a-2)$ であるから、

$$y = (2s - 4a + 2)(x - s) + s^2 - (4a-2)s + 4a^2 + 1$$

$$y = (2s - 4a + 2)x - 2s^2 + (4a-2)s + s^2 - (4a-2)s + 4a^2 + 1$$

$$y = (2s - 4a + 2)x - s^2 + 4a^2 + 1 \cdots ②$$

$\cdots$(答)②、④、②、④、①

ここで、① と ② は同じ直線を表しているので、

$$\begin{cases} 2t + 2 = 2s - 4a + 2 \\ -t^2 + 1 = -s^2 + 4a^2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = s - 2a \\ s^2 = t^2 + 4a^2 \end{cases}$$

$$s^2 = (s - 2a)^2 + 4a^2$$

$$s^2 = s^2 - 4as + 4a^2 + 4a^2$$

$$4as = 8a^2$$

$a > 0$ より、$s = 2a$

よって、$t = 0$ $\cdots$(答)⓪、②

したがって、l の方程式は、

$$y = 2x + 1$$

$\cdots$(答)②、①

(2) 二つの放物線 C, D の交点を求めると、

$$x^2 - (4a-2)x + 4a^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$(-4a+2)x + 4a^2 = 2x$$

$$4ax = 4a^2$$

$a > 0$ より、$x = a$ $\cdots$(答)ⓐ

C と直線 l、および直線 $x = a$ で囲まれた図形の面積を S とすると、

$$S = \int_0^a \{(x^2 + 2x + 1) - (2x + 1)\}dx$$

$$= \int_0^a x^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$

$$= \frac{a^3}{3}$$

$\cdots$(答)③、③

(3) $a \geqq \dfrac{1}{2}$ とする。二つの放物線 C, D と直線 l で囲まれた図形の中で $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす部分の面積 T について、

$a > 1$ のとき、a の値によらず $\cdots$(答)①

$$T = \int_0^1 \{(x^2 + 2x + 1) - (2x + 1)\}dx$$

$$= \int_0^1 x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}$$

$\cdots$(答)①、③

であり、$\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき、

$$T = S + \int_a^1 \left\{x^2 - (4a-2)x + 4a^2 + 1 - (2x+1)\right\} dx$$

$$= S + \int_a^1 (x^2 - 4ax + 4a^2)dx$$

$$= S + \int_a^1 (x - 2a)^2 dx$$

$$= S + \frac{1}{3}\left[(x - 2a)^3\right]_a^1$$

$$= \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}\{(1 - 2a)^3 - (-a)^3\}$$

$$= \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}(1 - 6a + 12a^2 - 8a^3 + a^3)$$

$$= \frac{1}{3}(-6a^3 + 12a^2 - 6a + 1)$$

$$= -2a^3 + 4a^2 - 2a + \frac{1}{3}$$

$\cdots$(答)②、④、②、①、③

(4) 次に、(2), (3) で定めた S, T に対して、$U = 2T - 3S$ とおく。

$$U = 2\left(-2a^3 + 4a^2 - 2a + \frac{1}{3}\right) - 3 \cdot \frac{a^3}{3}$$

$= -5a^3 + 8a^2 - 4a + \frac{2}{3}$

a が $\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ の範囲を動くとき、

$U' = -15a^2 + 16a - 4 = 0$

$15a^2 - 16a + 4 = 0$

$(3a-2)(5a-2) = 0$

$a = \frac{2}{3}, \frac{2}{5}$

増減表を描くと、

a	$\frac{2}{5}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
U'	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
U	極小	↗	↗	↗	極大	↘	↘

よって、U の最大値は $a = \frac{2}{3}$ のときで、

$U = -5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$

$\cdots$(答)②、③、②、②、⑦

第 3 問

数列 $\{a_n\}$ は初項 a_1 が 0 であり、$n = 1, 2, 3, \cdots$ のとき、

$a_{n+1} = \frac{n+3}{n+1}\{3a_n + 3^{n+1} - (n+1)(n+2)\} \cdots$ ①

(1) $a_2 = \frac{4}{2}\{3 \cdot 0 + 3^2 - 2 \cdot 3\}$

$= 2 \cdot 3$

$= 6$

$\cdots$(答)⑥

(2) $b_n = \frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$ とおく。

数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。

$b_1 = \frac{a_1}{3 \cdot 2 \cdot 3} = 0$ $\cdots$(答)⓪

①の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)} = \frac{n+3}{n+1}\,\frac{3a_n + 3^{n+1} - (n+1)(n+2)}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)} = \frac{3a_n + 3^{n+1} - (n+1)(n+2)}{3^{n+1}(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)} = \frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$\cdots$(答)①、①、②、③

したがって、

$$b_{n+1} - b_n = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$\cdots$(答)①

n を 2 以上の自然数とするとき、

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$ $\cdots$(答)②、①、①

一方、

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$$

$= \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

$= \frac{1}{9}\,\frac{1 - (\frac{1}{3})^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{6}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$

$= \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\cdots$(答)①、⑥、①、②

が成り立つ。

これらを利用すると、

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)$$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right) - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= \frac{3}{6}\left(\frac{n-1}{n+1}\right) - \frac{n+1}{6(n+1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= \frac{3(n-1) - (n+1)}{6(n+1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= \frac{2n-4}{6(n+1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= \frac{n-2}{3(n+1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\cdots$(答)②、③、①

これは $n = 1$ のときも成り立つ。

(3) (2) により、$\{a_n\}$ の一般項は、

$a_n = 3^n(n+1)(n+2)b_n$

$= 3^n(n+1)(n+2) \times \left\{\frac{n-2}{3(n+1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

$= 3^{n-1}(n+2)(n-2) + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$= 3^{n-1}(n^2-4) + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$\cdots$(答)③、①、④、①、②、②

で与えられる。

このことから、すべての自然数 n について、a_n は整数となることが分かる。

(4) k を自然数とする。

$a_{3k}, a_{3k+1}, a_{3k+2}$ を 3 で割った余りを考える。

$$a_{3k} = 3^{3k-1}(9k^2-4) + \frac{(3k+1)(3k+2)}{2}$$
$$\equiv \frac{9k^2+9k+2}{2} \ (mod\ 3)$$
$$\equiv \frac{9k(k+1)+2}{2} \ (mod\ 3)$$

$k(k+1)$ は偶数だから、$\frac{9k(k+1)}{2}$ は 3 で割り切るので、

$$a_{3k} \equiv \frac{2}{2} = 1 \ (mod\ 3)$$

よって、a_{3k} を 3 で割った余りは 1 である。　$\cdots$(答)①

$$a_{3k+1} = 3^{3k}(9k^2+6k-3) + \frac{(3k+2)(3k+3)}{2}$$
$$= 3^{3k}(9k^2+6k-3) + 3\frac{(3k+2)(k+1)}{2}$$

$(3k+2)(k+1)$ は偶数だから、a_{3k+1} は 3 で割り切るので余りは 0 である。　$\cdots$(答)⓪

$$a_{3k+2} = 3^{3k+1}(9k^2+12k) + \frac{(3k+3)(3k+4)}{2}$$
$$= 3^{3k+1}(9k^2+12k) + 3\frac{(k+1)(3k+4)}{2}$$

$(k+1)(3k+4)$ は偶数だから、a_{3k+2} は 3 で割り切るので余りは 0 である。　$\cdots$(答)⓪

すると、$\{a_n\}$ の初項から第 2020 項までの和を 3 で割った余りについて、

$2020 = 3 \times 673 + 1$ であるから、

$$(1+0+0) \times 673 + 0 \equiv 1 \ (mod\ 3)$$　$\cdots$(答)①

第 4 問

点 O を原点とする座標空間に 2 点

$A(3,3,-6), B(2+2\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3}, -4)$

をとる。3 点 O, A, B の定める平面を α とする。また、α に含まれる点 C は、

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$、$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 24 \cdots$①

を満たす。

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{3^2+3^2+(-6)^2} = \sqrt{9+9+36} = 3\sqrt{6}$　$\cdots$(答)③、⑥

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{(2+2\sqrt{3})^2+(2-2\sqrt{3})^2+(-4)^2}$$
$$= \sqrt{4+8\sqrt{3}+12+4-8\sqrt{3}+12+16}$$
$$= 4\sqrt{3}$$　$\cdots$(答)④、③

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 6+6\sqrt{3}+6-6\sqrt{3}+24 = 36$$　$\cdots$(答)③、⑥

(2) 点 C は平面 α 上にあるので、実数 s, t を用いて、

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表すことができる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ より、

$$0 = s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + t\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$54s + 36t = 0$$
$$3s + 2t = 0$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 24$ より、

$$24 = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$
$$24 = 36s + 48t$$
$$3s + 4t = 2$$

よって、

$$2t = 2$$
$$t = 1$$
$$3s = -2$$
$$s = \frac{-2}{3}$$　$\cdots$(答)⊖、②、③、①

となる。すると、

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

よって、

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = \frac{4}{9}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$
$$= \frac{4}{9} \cdot 54 - \frac{4}{3} \cdot 36 + 48$$
$$= 24 - 48 + 48 = 24$$

よって、

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 2\sqrt{6}$$　$\cdots$(答)②、⑥

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$
$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$= (2, 2, -4)$$　$\cdots$(答)②、②、⊖、④

したがって、平面 α 上の四角形 $OABC$ について、

$CB \mathbin{/\!/} OA$ より、平行四辺形ではないが台形である。

$\cdots$(答)③

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから、四角形 $OABC$ の面積は、

$$(3\sqrt{6}+2\sqrt{6}) \cdot 2\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = 30$$　$\cdots$(答)③、⓪

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OD}}$、$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2\sqrt{6}$ かつ、z 座標が 1 であるような点 D の座標を考える。

$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (u, v, 1)$ とおくと、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より、

$$3u + 3v - 6 = 0$$
$$u + v = 2$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 0)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2\sqrt{6}$ より、

$$2\sqrt{3}u - 2\sqrt{3}v + 0 = 2\sqrt{6}$$
$$u - v = \sqrt{2}$$

よって、

$u=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$、$y=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ゆえに、点 D の座標は、

$$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) \quad \cdots(答)①、②、②、①、②、②$$

このとき、$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=2$ となるので、

$$\cos\angle COD=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot 2}$$

$$\cos\angle COD=\frac{1}{2}$$

$$\angle COD=60^\circ \quad \cdots(答)⑥、⓪$$

α と β は垂直なので、求める高さを h とすると、$OD=2$ より、

$$h=2\sin 60^\circ=\sqrt{3} \quad \cdots(答)③$$

また、三角形 ABC の面積は、

$$2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}=12$$

よって、四面体 $DABC$ の体積は、

$$12\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}=4\sqrt{3} \quad \cdots(答)④、③$$

第 5 問

(1) ある高校の生徒 720 人全員を対象に、ある 1 週間に市立図書館で借りた本の冊数について調査を行った。

その結果、1 冊も借りなかった生徒が 612 人、1 冊借りた生徒が 54 人、2 冊借りた生徒が 36 人、3 冊借りた生徒が 18 人、4 冊以上借りた生徒はいなかった。

このとき、X の平均 (期待値) は、

$$E(X)=0\cdot\frac{612}{720}+1\cdot\frac{54}{720}+2\cdot\frac{36}{720}+3\cdot\frac{18}{720}$$

$$=\frac{180}{720}$$

$$=\frac{1}{4} \quad \cdots(答)①、④$$

一方、X^2 の平均は、

$$E(X^2)=0\cdot\frac{612}{720}+1\cdot\frac{54}{720}+4\cdot\frac{36}{720}+9\cdot\frac{18}{720}$$

$$=\frac{360}{720}$$

$$=\frac{1}{2} \quad \cdots(答)①、②$$

よって、X の分散は、

$$\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$$

ゆえに、X の標準偏差は、

$$\sigma(X)=\frac{\sqrt{7}}{4} \quad \cdots(答)⑦、④$$

(2) $p=0.4$ のとき、Y の平均は

$E(Y)=600\cdot 0.4=240$

標準偏差は、

$$\sigma(Y)=\sqrt{600\cdot 0.4\cdot 0.6}=\sqrt{144}=12 \quad \cdots(答)①、②$$

ここで、$Z=\frac{Y-240}{12}$ とおくと、標本数 600 は十分に大きいので、Z は近似的に標準正規分布に従う。このことを利用して、Y が 215 以下になる確率を考えると、

$$Z=\frac{215-240}{12}=-\frac{25}{12}\fallingdotseq 2.08$$

であるから、

$$P(Y\leqq 215)$$

$$=P(Y\geqq 265)$$

$$=1-P(Y\leqq 265)$$

$$\fallingdotseq 1-(0.5+0.4812)$$

$$=1-0.9812$$

$$=0.0188$$

$$\fallingdotseq 0.02 \quad \cdots(答)⓪、②$$

となる。

また、$p=0.2$ のとき、Y の平均は

$$0.2\cdot 600=120$$

となるので、$\frac{1}{2}$ 倍となる。 $\cdots$(答)②

一方、Y の分散は、

$$\sigma(Y)=\sqrt{600\cdot 0.2\cdot 0.8}=\sqrt{6\cdot 16}=4\sqrt{6}$$

となるので、$\frac{\sqrt{6}}{3}$ 倍となる。 $\cdots$(答)⑥

(3) 市立図書館に利用者登録のある高校生全員を母集団とする。1 回あたりの利用時間 (分) を表す確率変数を W とし、W は母平均 m、母標準偏差 30 の分布に従うとする。この母集団から大きさ n の標本 $W_1, W_2, \cdots, W_n$ を無作為に抽出した。

利用時間が 60 分をどの程度超えるかについて調査するために、

$$U_1=W_1-60, \cdots, U_n=W_n-60$$

とおくと、確率変数 $U_1, \cdots, U_n$ の平均について、$k=1, 2, \cdots, n$ に対して、

$$E(U_k)=E(W_k-60)=E(W_k)-E(60)$$

$$=m-60 \quad \cdots(答)⑥、⓪$$

同様に標準偏差は、

$$\sigma(U_k)=\sigma(W_k-60)=\sigma(W_k)=30 \quad \cdots(答)③、⓪$$

となる。

ここで、$t=m-60$ として、t に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよう。この母集団から無作為抽出された 100 人の生徒に対して、$U_1, \cdots, U_{100}$ の値を調べたところ、その標本平均の値が 50 分であった。

標本数は十分大きいことを利用して、この信頼区間を求めると、

$$50-1.96\times\frac{30}{\sqrt{100}}\leqq t\leqq 50+1.96\times\frac{30}{\sqrt{100}}$$

$$50-5.88\leqq t\leqq 50+5.88$$

$$44.12\leqq t\leqq 55.88$$

$$44.1\leqq t\leqq 55.9 \quad \cdots(答)④、④、①、⑤、⑤、⑨$$